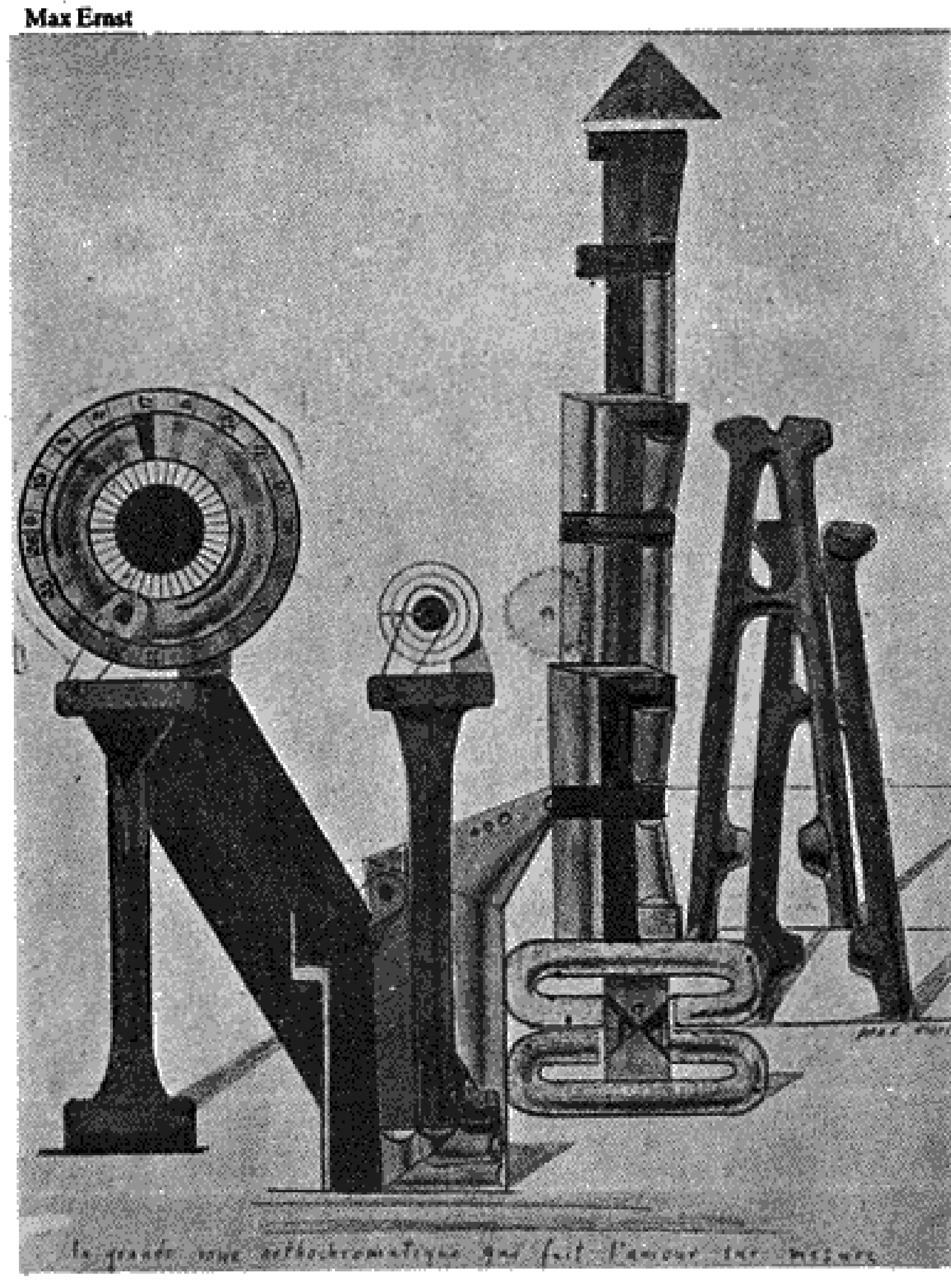
El problema de medir

GUILLERMO GRABINSKY S.*

Max Ernst



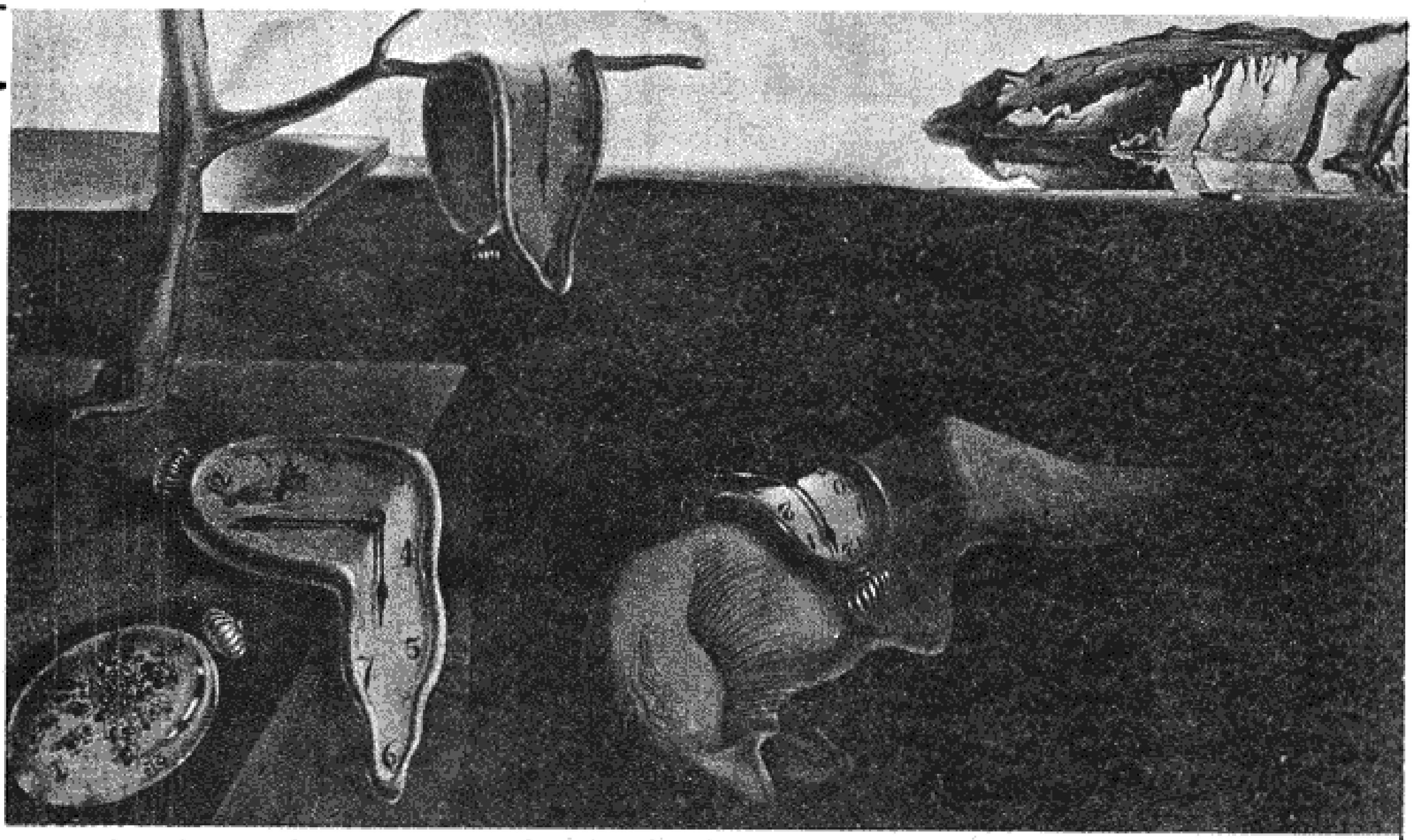
El problema de medir figuras geométricas tiene un origen muy antiguo, aún más que el de la historia escrita del hombre. El primer método conocido es el llamado "método de exhausión" introducido por Eudoxio de Cnidus (400-347 A.C.), ampliamente desarrollado por Arquímedes (287-212 A.C.) y posteriormente ignorado. No fue sino hasta principios del siglo XIX que con la ayuda de los nacientes métodos analíticos es nuevamente examinado, junto con el problema de integración al cual está ligado y cuyo desarrollo a partir de entonces intentaremos narrar.

A.L. Cauchy en su libro "Calcul Infinitesimel" (1823) utiliza el concepto de límite para poner por primera vez el concepto de integral de una función en un contexto puramente analítico, retomando el método de Eudoxio como sigue: Sean $f : [a,b] \to \mathbf{R}^+$ una función acotada y $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ puntos que subdividen a $[a,b]$ en n subintervalos cerrados. Se define la suma de Cauchy (hoy llamada suma de Riemann) como la expresión: $\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(x_{k+1} - x_k)$ donde $t_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Al límite de estas sumas (si existe y es independiente de los puntos t_k) cuando la longitud del mayor subintervalo tiende a cero, es por definición la integral de f en $[a,b]$ denotada: $R\int_a^b f(t)dt$.

El mismo Cauchy proporciona una demostración incompleta de la existencia de la integral para el caso en que f sea continua, demostración que completa J.G. Darboux (en 1875), al introducir la suma superior e inferior (de Darboux) dadas por las expresiones: $\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$ y $\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$ con $M_k = sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ y $m_k =$

* *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM*



$\inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$. Tomando el límite cuando la longitud del mayor subintervalo tiende a cero se obtiene la integral superior e inferior de Darboux (respectivamente) y se dice que f es Riemann integrable si y sólo si la integral superior coincide con la integral inferior es cuyo caso el valor común se define como la integral de Riemann de f.

Se dedicó una cantidad considerable de trabajos para encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre el conjunto D de discontinuidades de una función acotada f que garanticen la integrabilidad de Riemann. Al principio se pensó que ello dependía solamente del comportamiento de f en los puntos de D, hasta que en 1903, G. Vitali demostró que la integrabilidad de f depende exclusivamente de la naturaleza de D (pag. 146(2)); hecho que a primera vista resulta sorprendente.

Durante la misma época fueron estudiadas también las series trigonométricas y en particular se investigaron algunas condiciones suficientes para la convergencia de las series de Fourier de funciones periódicas, cuyos coeficientes se obtienen calculando las integrales: $\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt$ y $\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt$. En este ámbito y en casi todas las ramas del Análisis, es de suma importancia el problema de justificar la integración término a término de los sumandos de una serie de funciones que converge pero no necesariamente de manera uniforme. P. du B. Reymond probó en 1883 que en el caso en que la serie de Fourier sea la de una función continua, ésta puede ser integrada término a término, lo cual mostró que en una clase de ejemplos muy importante tal resultado era válido (pag. 111 (2)). Se realizaron esfuerzos adicionales para resolver este problema con el fin de encontrar condiciones generales que permitieran este procedimiento, sin embargo la integral de Riemann resultó ser poco útil ya que el límite no uniforme de funciones Riemann integrables puede no serlo. El teorema de Arzela-Osgood (1898) sobre la convergencia acotada es el mejor resultado de este tipo (TEO 22.14 pag. 288 (1)).

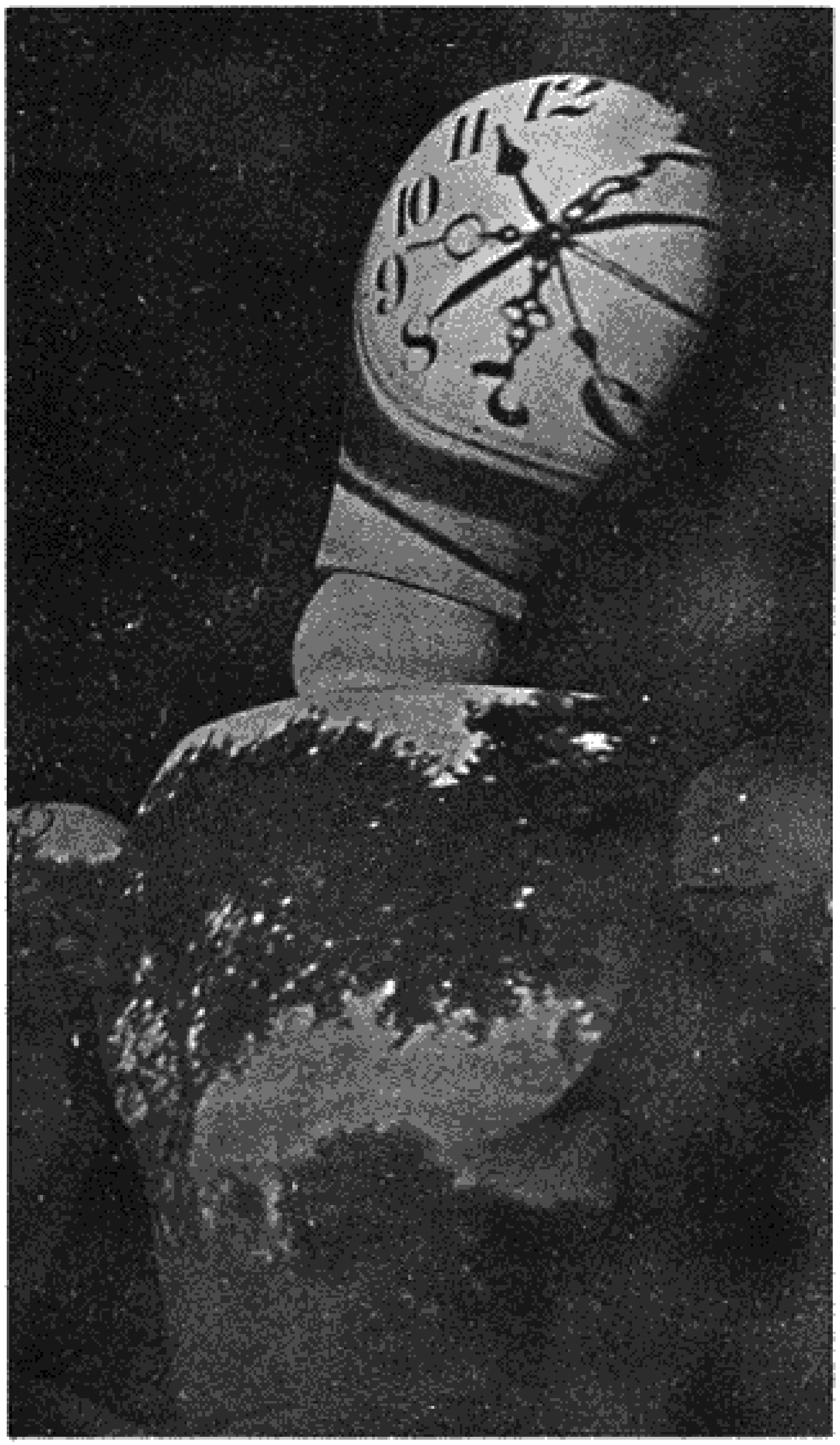
Por otro lado, estudiando la estructura de los conjuntos de unicidad para series trigonométricas, desde 1870, G. Cantor introduce las nociones básicas de la teoría moderna de los conjuntos; teoría que no sólo revolucionó el enfoque y el lenguaje del problema de medida e integración sino todas las áreas de las Matemáticas. La retroalimentación entre la teoría de la integración y la de las series trigonométricas es el perfecto ejemplo de como los problemas y avances en un área enriquecen a otra (5).

Los primeros intentos modernos por asociar un valor numérico llamado medida (longitud, área o volumen) a la mayor cantidad de objetos geométricos A se deben a A. Harnack, O. Stolz y G. Cantor (1884-1885) (pags. 61-70 (2)). Estos fueron infructuosos pues sólo proponían aproximaciones para A por afuera, asignándole el ínfimo de las sumas de las medidas ordinarias de objetos más simples, como intervalos o celdas cuyas uniones **finitas** cubren a A. Parte esencial del fracaso fue que dicha asignación no resultaba ser aditiva, propiedad aceptada como básica para una medida. Dicha falla fue reconocida por G. Peano y C. Jordan quienes introdujeron aproximaciones por fuera y desde adentro de A, llamadas "el contenido exterior" y "el contenido interior" de A respectivamente. Cuando ambos valores coinciden lo definen como el **contenido** (Inhalt) de A. Dicho concepto sin embargo, posee todavía un valor limitado, ya que a conjuntos tan comunes e importantes como el de los racionales no se les puede asignar un contenido (2) (Si $A = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ entonces el contenido exterior de A es igual a 1, mientras que el contenido interior es igual a cero).

E. Borel ataca este problema para subconjuntos de $\mathbf{R}$ extendiendo primero la longitud ordinaria de intervalos a abiertos más generales, basándose en que todo conjunto abierto es la unión numerable y disjunta de intervalos abiertos, y asignándole la suma de las longitudes de los intervalos que lo conforman, la cual puede muy bien ser infinita. Mediante iteración indefinida y el mismo proceso de extensión, obtiene una medida σ- aditiva sobre la clase, llamada hoy en día, de conjuntos de Borel.

El paso decisivo es dado por H. Lebesgue en su tesis doctoral "Integrale, longeur, volume" (1902) en la que combina las ideas de sus predecesores Jordan y Borel, salvo que en las aproximaciones utiliza cubiertas numerables en lugar de cubiertas finitas tanto para subconjuntos de $\mathbb{R}$ como de $\mathbb{R}^n$. A continuación define la integral (de Lebesgue) de funciones no negativas como el "área" del conjunto ordenado inferior cuando este conjunto es medible en el sentido de Lebesgue y que evidéntemente es la afirmación correspondiente a la poco formal, pero muy sugestiva, de que la integral en el "área bajo la curva".

Las ventajas de la nueva integral fueron reconocidas de inmediato y aplicadas primero al estudio de series de Fourier por el mismo Lebesgue, P. Fatou, N.N. Luzin y A. Denjoy, por mencionar sólo algunos, extendiendo cada uno de los resultados (5). Además de ampliar la familia de funciones suceptibles de ser integradas, la nueva integral posee una propiedad fundamental que no comparte con la integral de Riemann, que es un teorema muy general de convergencia monótona, y su corolario el teorema de la convergencia dominada (pag. 128 (2)).



Los trabajos de M. Frechet, en 1915 y de K. Caratheodory, en 1918 abstraen los conceptos de Lebesgue y los desligan de su origen en espacios euclideanos, así como del marco topológico, para estructurar una teoría axiomatizada de la medida de integración en la cual sólo se considera un conjunto no vacío X, una familia especial de subconjuntos de X llamada una σ-álgebra, una medida definida sobre dicha familia y las funciones que son medibles (4). Este mismo marco es el usado en la teoría moderna de Probabilidad, en la que X es el espacio de muestras, la σ-álgebra es la familia de eventos y una medida de probalilidad sobre ella. Las funciones medibles corresponden a las variables aleatorias.

El estudio de funciones absolutamente continuas (*i.e.* integrales indefinidas de funciones integrables) iniciada por G. Vitali en 1905, así como la teoría de diferenciación de éstas, son extendidas por M.J. Radon y O. Nikodym (4) a espacios abstractos de medida y constituye hoy en día una herramienta básica en la Teoría de Probabilidad (teoría de martingalas, por ejemplo).

Otro enfoque usado en el problema de la integración es el de W.H. Young (1911) y especialmente el de P.J. Daniell (1917-1918), ambos influidos sin duda por el desarrollo del Análisis Funcional, que consiste en tomar a la integral como el concepto fundamental y considerarla como una funcional lineal, no negativa, con la propiedad de la monotonía (correspondiente al T.C.M. de Levi) y definida sobre un espacio vectorial V de funciones acotadas, que además es cerrado bajo toma de máximos y mínimos.

Mediante un procedimiento de extensión se obtiene una nueva integral para la familia W de límites no decrecientes de elementos de V. A continuación si $-W$ denota la familia de funciones $-f$ con $f \in W$, entonces se define $\int(-f) = -\int f$ con la intención de preservar la linealidad. Finalmente, dada una función arbitraria f, se le aproxima mediante funciones $g \in -W$ y $h \in W$, tales que $g < f < h$ y se define la integral de f en el caso de que el supremo de las integrales de las $g \in -W$ coincida con el ínfimo de las integrales de $h \in W$ y el valor común se le llama la integral de Daniell de f (3).

En el caso especial de la integral de Lebesgue en un intevalo $[a, b]$, se empieza con V igual al espacio de funciones continuas definidas en él. Para este caso W consiste en las funciones semicontinuas superiormente y $-W$ en las funciones semicontinuas inferiormente y la clase de funciones que resultan ser integrables con el método de aproximación descrito coincide con la familia de funciones que son Lebesgue integrables.

En años recientes el panorama se vuelve más abstracto todavía, ya que se consideran funciones o medidas tomando valores en un espacio vectorial normado en el que el concepto de orden pierde sentido (un ejemplo elemental es el de funciones o medidas complejas) y así, las integrales son vectores también. Algunos de los métodos y resultados válidos para la integral de Lebesgue se generalizan para esta nueva integral (llamada la integral de Bochner (1933)), mientras que en otras es necesario usar métodos sofisticados del análisis funcional (*v.gr.* resultados que correspondan al de Radon-Nikodym) ¿Cuál será el siguiente nivel de abstracción? Lo desconozco, aunque creo que al tema le resta todavía mucha cuerda.

BIBLIOGRAFIA

1. Bartle, R. G. 1964 *The Elements of Real Analysis*, Wiley.
2. Hawkins, T. 1977 *Lebesgue Theory of Integration, It's origins and Development*, Chelsea.
3. Loomis, L.H. 1953 *An Introduction to Harmonic Analysis*, Van Nostrand.
4. Saks, S. 1964 *The Theory of the Integral*, Dover.
5. Zygmund, A. 1959 *Trigonometrical Series Vol I*, Cambridge.