Laura Elena Morales Guerrero

La **cuadratura**

A la memoria de E.O.M.
De todas maneras lo hubiera escrito para él.
Se lo ofrecí.

***T**odo comenzó cuando le pedí que me dibujara un círculo que se transformara en un cuadrado, de manera sencilla, cualitativa. Sin meternos, por supuesto, en el problema de la cuadratura del círculo.*

—…¿El problema de la cuadratura del círculo…?, dijo él.

—Sí, el problema de construir un cuadrado de área igual a la de un círculo, usando regla y compás solamente. Es uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad que los griegos no pudieron resolver geométricamente mediante la construcción de líneas rectas y círculos, excepto por aproximación.

—Y, ¿cuáles son los otros dos?

La trisección de cualquier ángulo, es decir, dividir un ángulo en tres partes iguales, y la duplicación del cubo: doblar en volumen un cierto cubo.

Una primera característica común de los tres problemas es que no encuadraban dentro de la geometría de polígonos y poliedros, de segmentos, círculos y cuerpos redondos. Su solución sólo podía obtenerse utilizando otras figuras o medios que iban más allá de las construcciones fundadas en las intersecciones de rectas y circunferencias o, como se dijo posteriormente, construcciones hechas exclusivamente con regla y compás. En segundo lugar, y esto llamó la atención de los geómetras griegos, algunos de los métodos que resolvían uno de esos problemas a veces resolvían también otro, hecho que revelaba alguna relación entre los mismos, relación que, sin embargo, permaneció siempre oculta para ellos.

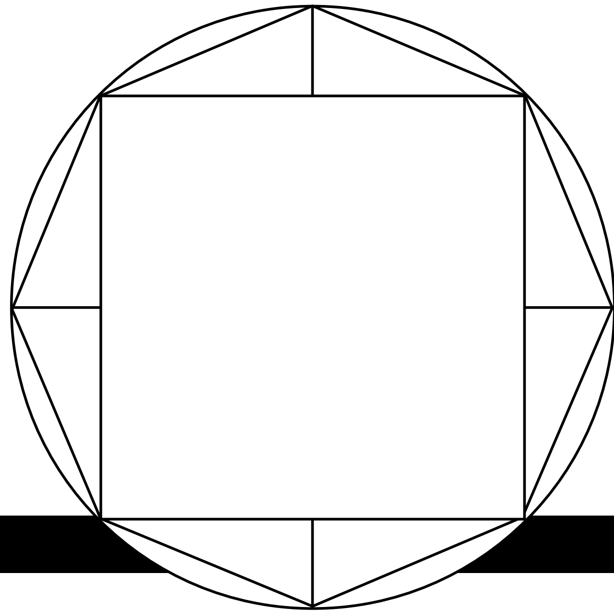
El primero de los tres problemas fue la trisección de cualquier ángulo, y es el menos famoso de los tres. Es difícil dar una fecha exacta de cuándo este problema apareció por primera vez. La trisección del ángulo recto era sencilla, pero la trisección de un ángulo arbitrario atrajo la atención y el esfuerzo de muchos matemáticos. A este problema se pueden agregar los relacionados: dividir cualquier ángulo dado en un número arbitrario de partes iguales y el de inscribir en un círculo un polígono regular de cualquier número de lados.

El segundo problema fue la cuadratura del círculo, esto es, encontrar un cuadrado cuya área sea la misma que la de un círculo dado. La solución sería simple si pudiéramos encontrar una línea recta que sea igual en longitud a la circunferencia del círculo, esto es si pudiéramos rectificar la circunferencia. Esto se hace fácilmente enrollando una línea recta en forma de círculo, pero tal procedimiento utiliza un instrumento adicional a la regla y el compás: un cilindro con una superficie graduada.

El tercer problema fue la duplicación del cubo, encontrar el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble del de otro cubo.

De la investigación de estos problemas se ocuparon numerosos pensadores griegos del periodo helénico, el más antiguo de los cuales fue el filósofo Anaxágoras, contemporáneo notable de Zenón y a quien se conoce

del círculo



y otros problemas de geometría

como el último de los celebrados filósofos de la escuela jónica. Amigo y maestro de Eurípides, Pericles y otros grandes hombres de su tiempo, y condenado a muerte a la edad de 72 años por favorecer la causa persa. Aun cuando su trabajo principal fue en filosofía, donde su primer postulado era "la razón gobierna el mundo", se interesó en matemáticas y escribió sobre el problema de la cuadratura del círculo y sus perspectivas. Cuando fue desterrado de Atenas declaró: "No soy yo quien ha perdido a los atenienses, sino los atenienses quienes me pierden a mí".

Anaxágoras llegó a Grecia en el siglo v a.C., en la gran era de Pericles, proveniente de Jonia con una manera de pensar revolucionaria para la época. Existía un espíritu valiente de libre cuestionamiento que algunas veces entró en conflicto con lo establecido. Anaxágoras fue llevado a prisión en Atenas por su impiedad al afirmar que el Sol no era una deidad sino una enorme piedra calentada al rojo, tan grande como el Peloponeso y que la Luna era una tierra deshabitada que recibía la luz del Sol. Pericles intercedió por él para que fuera finalmente liberado de la prisión.

La ciencia griega estaba enraizada en una curiosidad fuertemente intelectual la cual, a menudo, contrastaba con la inmediatez utilitaria del pensamiento prehelénico. Anaxágoras representaba claramente la motivación griega típica: el deseo de saber. En matemáticas también la actitud griega difería, de manera tajante, de la de las primeras culturas potámicas. El contraste era claro por las contribuciones generalmente atribuidas a Tales y Pitágoras, en el siglo v a.C. Era, primordialmente, un filósofo natural más que un matemático. Pero su mente inquisidora lo llevó a involucrarse en el seguimiento de problemas matemáticos.

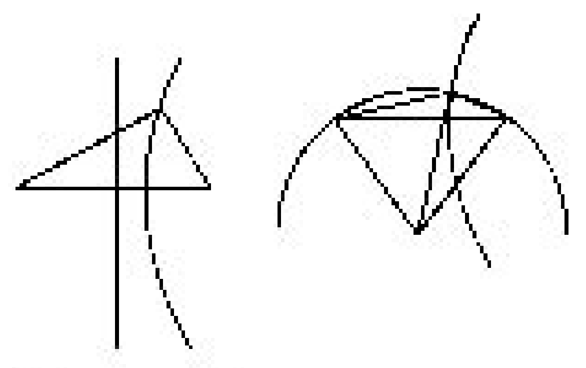
En su libro *Sobre el exilio* que escribió en la primera centuria d.C., Plutarco cuenta que mientras Anaxágoras estaba en la cárcel intentó "cuadrar el círculo".

Aquí tenemos la primera mención registrada de un problema que fascinaría a los matemáticos por más de 2 000 años. En una fecha posterior se entendió que el cuadrado requerido, de área exactamente igual a la del disco, se construiría con el uso de regla y compás solamente. Se trata de un tipo de matemáticas muy diferente a la de los egipcios y babilonios. No es la aplicación práctica de una ciencia de números a una faceta de la experiencia de la vida, sino una cuestión teórica. El problema matemático que Anaxágoras consideró no era más la preocupación del tecnologista como fueron aquellos que él postuló en ciencia relacionados con la estructura última de la materia. En el mundo griego las matemáticas estaban más estrechamente relacionadas con la filosofía que con las cuestiones prácticas y esta tendencia persiste hasta nuestros días.

Anaxágoras murió en 428 a.C., un año después de la muerte de Pericles. Se dice que Pericles murió a consecuencia de una plaga que acabó con, tal vez, un cuarto de la población. La profunda impresión que causó esta catástrofe es quizás el origen de un tercer problema matemático famoso: se sabe que una delegación de la ciudad de Delos fue enviada al oráculo de Apolo en Delfos para preguntar cómo se podría contrarrestar la plaga que invadió su ciudad y el oráculo respondió que se debería doblar en volumen el altar a Apolo, que tenía la forma de un cubo en su ciudad. Se cuenta que los habitantes de Delos realmente doblaron las dimensiones del altar pero esto no doblegó la plaga. El altar, por supuesto, se había incrementado ocho veces su volumen, no el doble. Esto, de acuerdo con la leyenda, fue el origen del problema de la duplicación del cubo, usualmente referido como el problema deliano o de Delos: dada la esquina de un cubo, construya solamente con compás y regla, la orilla de un segundo cubo que tenga el doble del volumen del primero.

—…*Él me preguntó qué fue lo que finalmente detuvo la plaga. Si algo la detuvo. Y, a ciencia cierta, no pude responderle.*

Las formas anecdóticas en las cuales los problemas han sido ocasionalmente transmitidos no deben crearnos prejuicios respecto a su importancia. Con mucha frecuencia ocurre que un problema fundamental es presentado en la forma de una anécdota o de un acertijo como, por ejemplo, la manzana de Newton (en la teoría de la gravitación universal), la promesa rota de Cardano



Estas dos soluciones involucran el dibujo de una hipérbola. La primera gráfica muestra que si AB es una línea fija, entonces el locus de un punto P tal que 2 x ángulo PAB = ángulo PBA, es una hipérbola. La hipérbola tiene excentricidad 2, foco en B y, por directriz, el bisector perpendicular de AB. El diagrama de la derecha muestra cómo esta hipérbola se puede utilizar para trisectar el ángulo AOB. Tomando O como centro, dibújese un círculo que toque A y B. Construya entonces la parábola con excentricidad 2, foco en B y con directriz, el bisector perpendicular de AB que corte el círculo en P. Entonces PO trisecta el ángulo AOB. Esto se ve fácilmente ya que, de las propiedades de la hipérbola descrita, 2 x ángulo PAB = ángulo PBA. Pero 2 x ángulo PAB = ángulo POB y 2 x ángulo PBA = ángulo POA (el ángulo en el centro de un círculo es dos veces el ángulo en la circunferencia que está sobre el mismo arco). Por tanto, 2 x ángulo POB = ángulo POA como se requería.

SOLUCIONES DE PAPPUS

(la hecha a Tartaglia en relación con las ecuaciones de tercer grado) o los barriles austriacos de vino de Kepler (y el problema de la determinación de áreas y volúmenes de superficies no planas).

Matemáticos de diferentes periodos, incluido el nuestro, han mostrado la conexión entre los tres problemas griegos y la moderna teoría de ecuaciones, la cual involucra consideraciones que pertenecen a los dominios de la teoría de grupos.

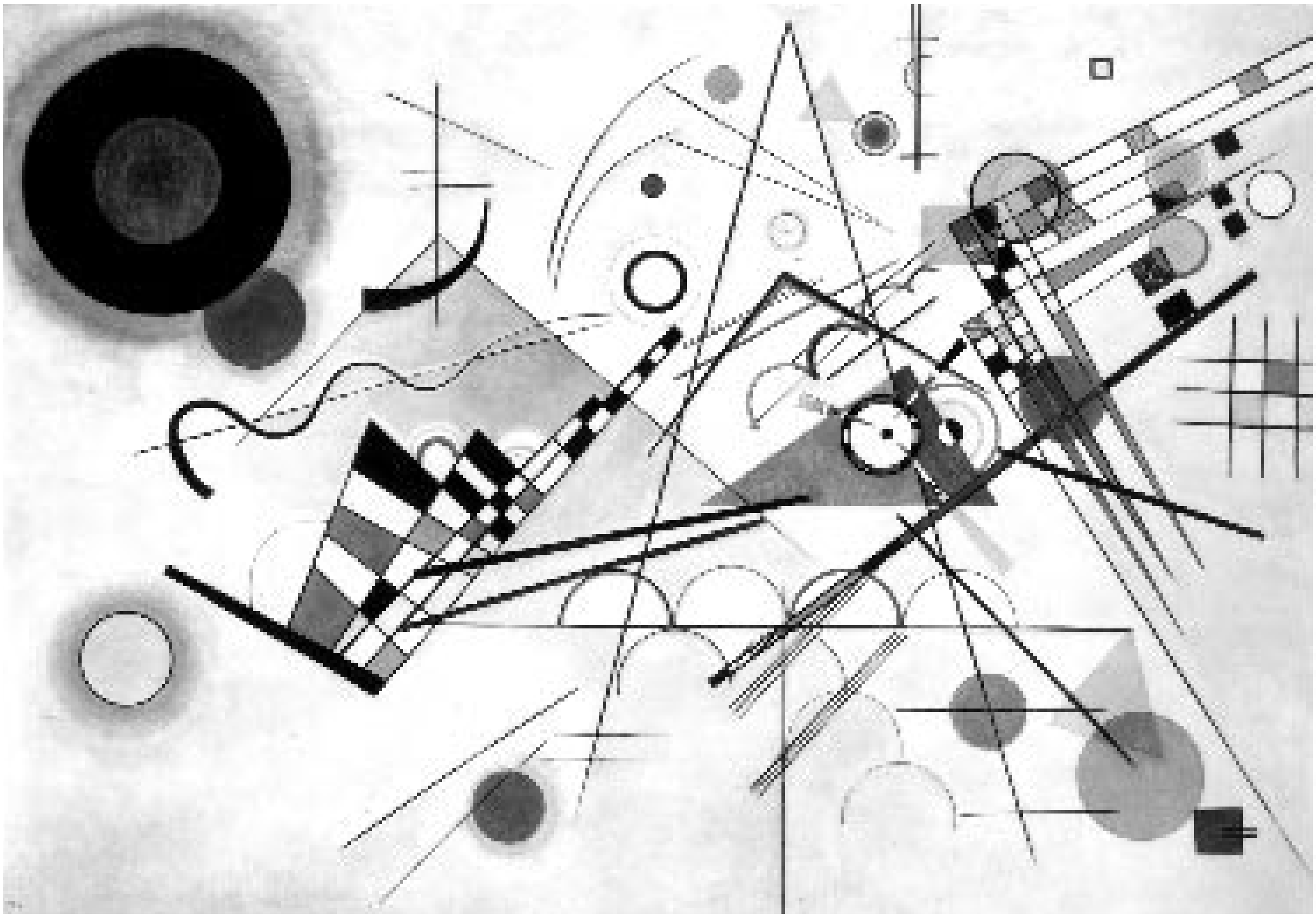
Hablar de las soluciones a estos tres problemas es hablar de la historia de las matemáticas. Su estudio se ha continuado a través de los siglos y las naciones.

Empecemos por referirnos a los dos primeros problemas, ya que a éstos, a menudo, se les reducía a la búsqueda de dos segmentos de línea, dados otros dos segmentos conocidos. Es decir, a encontrar dos medias proporcionales. Más aún, el problema de la duplicación del cubo es esencialmente el mismo sólo que ahora los valores de los segmentos conocidos están relacionados entre sí: uno es el doble del otro. Este problema es una extensión de la búsqueda de la proporcional geométrica. Pero la búsqueda de la doble proporcional geométrica, el problema que nos ocupa, no puede ser resuelto con regla y compás únicamente. Esto, por otra parte, condujo al descubrimiento de las secciones cónicas y de algunas curvas cúbicas y cuárticas y al de una curva trascendental llamada la cuadratriz, entre otras.

La trisección del ángulo

El problema de trisectar un ángulo, es decir, dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales, es un problema que debió haber nacido naturalmente, y si llamó la atención, fue sencillamente por la desconcertante discrepancia entre la sencillez de sus términos y la imposibilidad de resolverlo con los medios elementales de la geometría, imposibilidad tanto más llamativa cuanto que con esos medios podía dividirse un ángulo cualquiera en 2, 4, 8, … partes, y que también podían trisectarse algunos ángulos especiales como el recto, y el llano.

Este problema difiere de los otros dos. En primer lugar, no hay una historia real que relacione la forma en que el problema se empezó a estudiar. En segundo lugar, es un problema de un tipo distinto. Uno no puede cuadrar ningún círculo ni duplicar ningún cubo y, sin embargo, es posible trisectar ciertos ángulos. El problema es trisectar un ángulo arbitrario usando solamente regla y compás (lo cual es imposible).

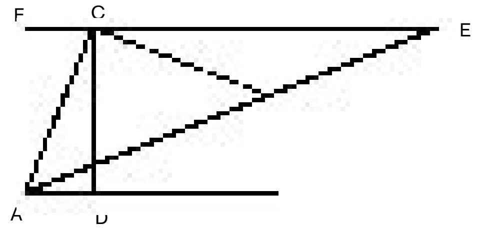


Los antiguos griegos buscaron la forma de dividir ángulos en cualquier relación requerida, ya que eso hubiera hecho posible la construcción de un polígono regular de cualquier número de lados. La construcción de polígonos regulares usando regla y compás era, ciertamente, una de las ambiciones de los matemáticos griegos, y no fue sino hasta los descubrimientos de Gauss, en el siglo XIX, que algunos polígonos —que los griegos no pudieron encontrar— fueron construidos con regla y compás.

Sabemos que en el siglo V a.C., Hipócrates de Quío hizo la primera contribución de importancia a los problemas de cuadrar el círculo y duplicar el cubo, pero también estudió el problema de trisectar un ángulo. Hay una forma directa de trisectar cualquier ángulo que era conocida por Hipócrates. Es una construcción muy fácil de llevar a cabo en la práctica pero que no es posible hacer con una regla no graduada y un compás. Y se dice que es una solución mecánica. Existe también otra solución mecánica dada por Arquímedes que está muy en relación con el espíritu de su trabajo *Sobre espirales*. Pero a los griegos no les satisfacían las soluciones mecánicas; Platón decía que procediendo de forma mecánica se perdía irremediablemente lo mejor de la geometría.

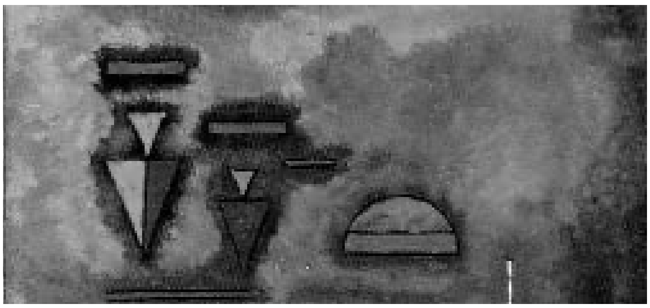
El sofista Hipias de Elis utilizó una curva para resolver el problema de la trisección de un ángulo. Hipias es uno de los primeros innovadores en la evolución del pensamiento griego de fines del siglo V a.C., a quien se debe la curva que más tarde se denominó cuadratriz, ya que por obra de un matemático del siglo siguiente, Dinostrato, se demostró que, con esa curva, podía rectificarse la circunferencia o, lo que es lo mismo, resolver el problema equivalente a la cuadratura del círculo.

Hipias fue un hombre de gran versatilidad que poseía la seguridad característica de los últimos sofistas; enseñó poesía, gramática, historia, política, arqueología, matemáticas y astronomía. A él se atribuye un excelente trabajo sobre Homero, colecciones de literatura griega y extranjera, tratados de arqueología y, además, decía ser competente en matemáticas; eso permite identificarlo con el Hipias que descubrió la cuadratriz, la primera curva diferente del círculo reconocida por los geómetras griegos.



Dado un ángulo CAB dibuje CD perpendicular a AB para cortarlo en D. Complete el rectángulo CDAF. Extienda FC hasta E y dibújese AE de manera que corte CD en H. Escójase el punto E tal que HE = 2AC. El ángulo EAB es entonces $1/3$ del ángulo CAB. Esto se ve considerando a G como el punto medio de HE tal que HG = GE = AC. Puesto que ECH es un ángulo recto, CG = HG = GE. Ahora el ángulo EAB = ángulo CEA = ángulo ECG. Puesto que AC = CG se tiene que el ángulo CAG = ángulo CGA. Pero el ángulo CGA = ángulo GEC + ángulo ECG = 2 x CEG = 2 x EAB como se requería..

TRISECCIÓN DE CUALQUIER ÁNGULO A LA HIPÓCRATES



Nicomedes, quien vivió en la misma época que Arquímedes, creó su famosa curva concoide; es, quizás, el método más conocido de los intentos griegos por trisectar un ángulo. Esta curva fue inventada por Nicomedes precisamente para formalizar el proceso de Arquímedes de rotar una regla manteniendo un punto sobre una línea. Y ésta es exactamente la curva necesaria para resolver las diferentes versiones del problema de la trisección del ángulo. Pero como en la práctica es más cómodo mover una regla que dibujar una curva concoide, su método fue más de interés teórico que práctico.

No sabemos nada de su vida, es famoso por su tratado *Sobre las líneas concoides*. Todas las aplicaciones de la concoide en la antigüedad fueron desarrolladas por el mismo Nicomedes, pero no fue sino hasta el siglo XVI, cuando se hicieron conocidos los trabajos de Pappus de Alejandría y de Eutocio, en los que se describía la curva, que el interés en ella revivió. Nicomedes también utilizó la cuadratriz, descubierta por Hipias, para resolver el problema de la cuadratura del círculo.

Eutocio nos dice que Nicomedes estaba tan orgulloso de haber descubierto la concoide que objetó profusa y seriamente el mecanismo de Eratóstenes para encontrar cualquier número de medias proporcionales, diciendo que era impracticable y totalmente fuera del espíritu de la geometría.

Menecmo, hermano de Dinostrato, fue un matemático destacado de la escuela de Cízico y a quien le se atribuye el descubrimiento de las cónicas. Esta curvas planas, que desde Apolonio de Perga, "el gran geómetra", llevan los nombres de elipse, parábola e hipérbola, son las curvas más simples después de la circunferencia y deben su nombre genérico al hecho de ser secciones planas de un cono circular, es decir, secciones cónicas.

En su *Colección matemática* (o *Sinagoga*), escrita en el año 325 o 340 a.C., Pappus menciona que el problema de trisectar un ángulo fue también resuelto por Apolonio usando "las cónicas". Pappus mismo da dos soluciones utilizando una hipérbola.

Las construcciones descritas por Pappus muestran el progreso hecho al pasar de una solución mecánica a otra que involucra secciones cónicas: las soluciones planas eran imposibles.

Sin embargo, la prueba de la imposibilidad tuvo que esperar las matemáticas del siglo XIX. Las piezas finales del argumento las puso en su lugar Pierre Wantzel, en 1837, cuando publicó las pruebas en el *Journal de Liouville*. Gauss había asegurado que los problemas de duplicar el cubo y trisectar un ángulo no podían ser resueltos con regla y compás, pero no dio pruebas. Wantzel fue el primero en probar estos resultados.

La cuadratura del círculo

El segundo problema famoso de la Antigüedad fue el de "cuadrar el círculo". Los primeros intentos fueron, por supuesto, empíricos. Se hicieron mucho antes del periodo científico de la civilización griega como aproximaciones crudas. Los griegos no se contentaron con resultados empíricos, así que la rectificación de la circunferencia y el problema relacionado de cuadrar el círculo atrajeron la atención de sus filósofos.

El problema de construir un cuadrado de área igual a la de un círculo se remonta al inicio de las matemáticas, cuando el escriba Ahmes, a quien se situa en el siglo II a.C., en el papiro *Rhind* da una regla para construir un cuadrado de área casi igual a la del círculo: cortar

$^1/_9$ del diámetro del círculo y construir el cuadrado con lo restante. Esto da una buena aproximación para el número π de 3.1605, aunque todavía lejos de 3.14159.

Hay tres métodos para atacar el problema de la curvatura: primero, usando la regla y el compás solamente; segundo, por medio de curvas planas superiores y, tercero, por métodos como las series infinitas, que aproximaban el problema. Los matemáticos griegos parecen haber encontrado la inutilidad del primer método, aun cuando ellos no probaron que fuese imposible. Con el segundo método tuvieron éxito, con el tercero fueron menos hábiles.

El problema de la cuadratura del círculo se originó en las matemáticas griegas y pocas veces se entendió debidamente. Pronto se popularizó, y no sólo entre los matemáticos. Conocemos los trabajos de algunos de ellos —como Oenopides, Antífanes, Brisón, Hipócrates e Hipias.

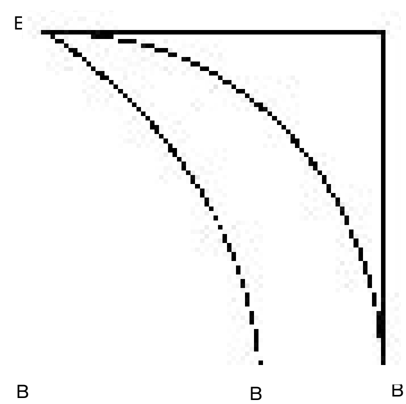
El historiador T. L. Heath cree que Oenopides de Quío es la persona que en el siglo V a.C. buscaba soluciones planas a problemas geométricos, y Proclo Diadochus atribuye a él dos teoremas. Este historiador del siglo V también piensa que el significado principal de esos resultados elementales fue que Oenopides puso en claro, por primera vez, las construcciones explícitas del tipo “planas” o de “regla y compás”. No hay ningún registro de algún intento hecho por Oenopides para cuadrar el círculo por métodos planos. Es de resaltar que los griegos no producían pruebas falaces de que el círculo podría cuadrarse por métodos planos.

Hipócrates de Quio fue realmente el primero en usar una construcción plana para encontrar un cuadrado con área igual a la de una figura con lados circulares. No obstante, Hipócrates estaba perfectamente consciente de que sus métodos habían fallado para cuadrar el círculo. A pesar de esto, fue el primero que realmente cuadró una figura curvilínea. Construyó semicírculos en los tres lados de un triángulo recto isósceles y mostró que la suma de las lunas así formadas es igual al área del triángulo mismo: las famosas “lúnulas de Hipócrates”. Al problema de la cuadratura como tal, su contribución no fue importante.

Las consideraciones de Hipócrates acerca de las lúnulas figuran en unos comentarios de Simplicio, en la primera mitad del siglo VI, y serían transcripciones de la historia de Eudemo de Rodas en cuyo caso constituirían el primer documento escrito de la matemática griega.

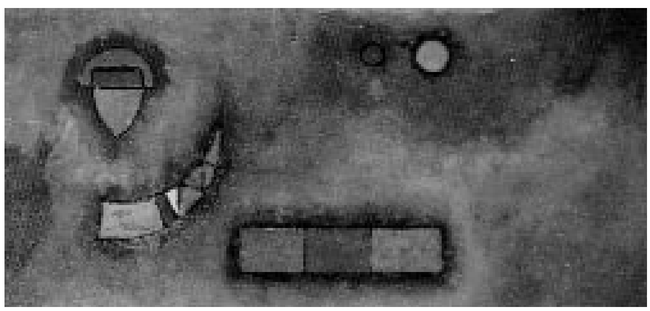
Hipócrates puede considerarse como el primer matemático “profesional”. Se cuenta que era un comerciante que, asaltado y saqueado por piratas, vino a pedir justicia a Atenas donde frecuentó a los filósofos y se convirtió en hábil geómetra. Y, en efecto, las contribuciones geométricas que se le atribuyen son importantes, destacándose entre ellas las investigaciones relacionadas con el problema de la cuadratura del círculo, con el cual están vinculadas sus célebres “lúnulas” cuadrables y con el de la duplicación del cubo que él convierte en un problema de geometría plana. Según el testimonio de Proclo, se le considera como el primer redactor de un texto de elementos de geometría.

El problema de la cuadratura del círculo, enfrentado por Hipócrates mediante la búsqueda de figuras circulares cuadrables, fue enfocado por algunos sofistas contemporáneos desde otro punto de vista que,



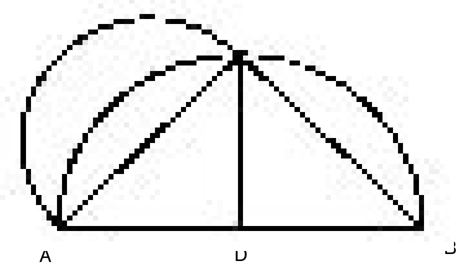
Sea ABΓΔ un cuadrado y BEΔ un arco de círculo con centro en Γ, en tanto, BHΘ es una cuadratriz. Se prueba que la razón del arco ΔEB a la línea recta BΓ, es la misma que la de BΓ hacia la línea recta ΓΘ. Una línea recta que sea la tercera proporcional de las líneas rectas ΘΓ y ΓB, será igual al arco BEΔ y cuatro veces esta línea recta será igual a la circunferencia de todo el círculo. Se encuentra entonces una línea recta igual a la circunferencia del círculo y se puede construir con ella un cuadrado que encierre un área igual a la del círculo mismo.

APLICACIÓN DE LA CUADRATRIZ PARA CUADRAR EL CÍRCULO



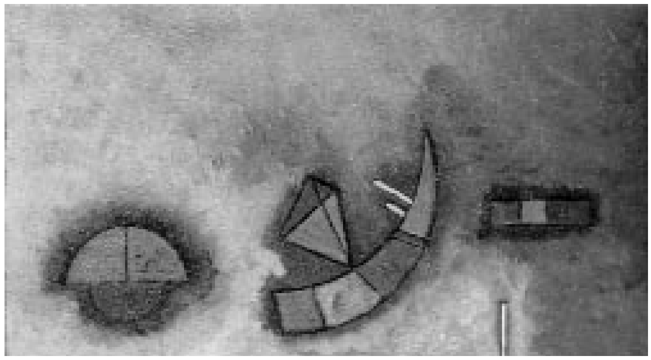
infructuoso entonces, resultó fértil más adelante. Así se atribuye al sofista Antífanes el raciocinio siguiente: si se inscribe en un círculo un cuadrado y después, bisectando los arcos respectivos, se inscribe un octágono y así sucesivamente se llegará a un polígono cuyos lados serán tan pequeños que el polígono podrá confundirse con el círculo y, como todo polígono puede transformarse en un cuadrado equivalente, queda demostrada la posibilidad de encontrar un cuadrado equivalente al círculo. Parece ser que, otro sofista, Brisón, en el 450 a. C., mejoró el argumento de Antífanes no solamente inscribiendo polígonos en un círculo sino también circunscribiéndolos, y declaró que el círculo es mayor que todos los polígonos inscritos y menor que los circunscritos, afirmando, con razón, que el área del círculo está comprendida entre la de los polígonos inscritos y circunscritos. A él se atribuye el agregado erróneo de que el área del círculo estaba dada por el valor medio proporcional entre las áreas de los cuadrados inscrito y circunscrito; esto equivale a adoptar para π la grosera aproximación de $2\sqrt{2} = 2\ 828$.

Este raciocinio sólo da una solución aproximada, pues por grande que sea el número de lados jamás un polígono se confunde con un círculo; tiene sin embargo el mérito de haber introducido en la consideración del problema los polígonos inscritos que, más tarde, en manos de Arquímedes, proporcionará uno de los primeros resultados positivos.



Hipócrates fue el primero en cuadrar una figura curvilínea. En la figura, supóngase que AB es el diámetro de un círculo, D su centro y AC y CB los lados de un cuadrado inscrito en él. Teniendo AC como diámetro, describa el semicírculo AEC. Una con CD. Ahora, puesto que y los círculos (y por consiguiente los semicírculos) son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros: Al problema de la cuadratura como tal, su contribución no fue importante. Sin embargo, sirvió de base para el trabajo de Antífanes y Brisón. El fue el primero en reconocer que el problema de la duplicación del cubo se resolvía encontrando la doble proporcional geométrica.

CUADRATURA DE LÚNULAS DE HIPÓCRATES

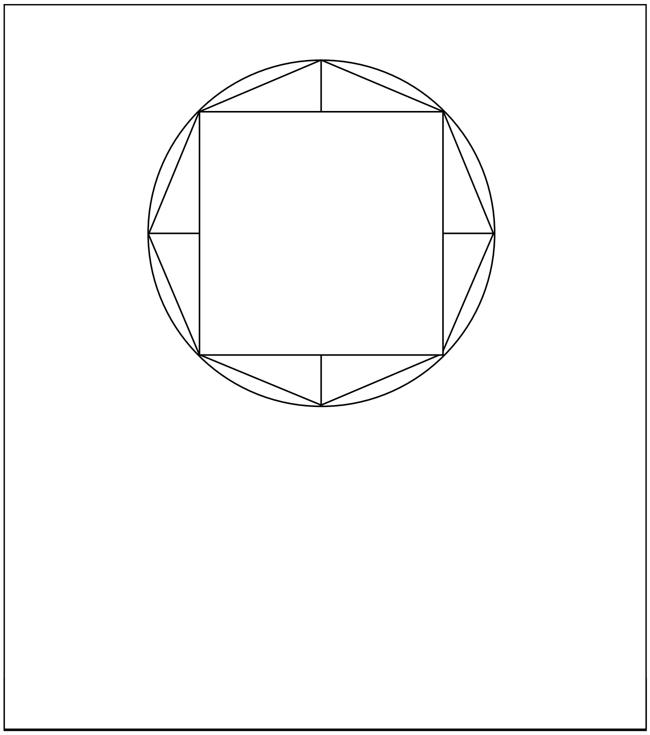


Hipias y Dinostrato se asocian con el método de cuadrar el círculo utilizando la curva llamada formadora de cuadrados o cuadratriz. Aun cuando la curva es invención de Hipias, su aplicación para cuadrar el círculo parece deberse a Dinostrato. Sin embargo, esta curva se construye con métodos mecánicos y fue también muy criticada por suponer, en primer lugar, como conocida la propiedad buscada, ya que se requería saber la relación entre una línea y un arco de círculo. Está claro que Dinostrato nunca proclamó que la cuadratriz fuera un método plano para cuadrar el círculo.

Nicomedes, muchos años más tarde, también usó la cuadratriz para cuadrar el círculo. Los antiguos griegos sabían, básicamente, que el círculo no podría cuadrarse por métodos planos aun cuando no tuvieron posibilidad de probarlo. La cuadratriz de Hipias es la primera curva conocida que se define cinemáticamente, es decir, con un movimiento de rotación uniforme alrededor de algún eje. Posteriormente, a consecuencia de los trabajos de Arquímedes, quedó demostrada la equivalencia entre los problemas de la rectificación de la circunferencia y el de la cuadratura del círculo.

La siguiente contribución notable a la solución del problema de la cuadratura del círculo fue la de Arquímedes en el 225 a.C. Para probar su proposición inscribió y circunscribió polígonos regulares, encontró sus áreas hasta para los de noventa y seis lados y mostró que el área del círculo está entre estos resultados. Estos límites, expresados en forma decimal moderna, son: 3.142857… y 3.140845… Si la notación actual y nuestros métodos para encontrar una raíz cuadrada se hubiesen conocido, el resultado se hubiera aproximado más puesto que los métodos geométricos permiten cualquier grado de aproximación. Los romanos estaban poco interesados en obtener resultados exactos en temas como éste, y no es de sorprender que Vitrubio hable de que la circunferencia de una rueda de diámetro de cuatro pies sea de doce y medio pies, de aquí que tomara el número π como 3 $1/8$.

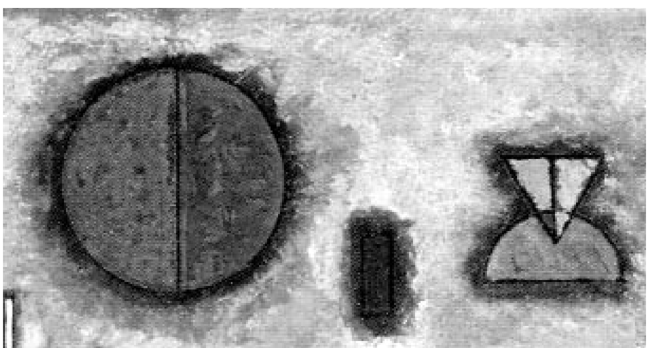
A lo largo de los años muchos esfuerzos fueron hechos por numerosos matemáticos en diferentes países para aproximar el valor de π y para dar métodos que aproximaran la cuadratura del círculo. Un gran paso en la prueba de que el problema no podría resolverse con regla y compás se dio cuando Lambert, en 1761, probó que π era un número irracional aun cuando eso no era concluyente. Sin embargo, en 1880, F. Lindemann probó la trascendencia de π al mostrar la imposibilidad de cuadrar el círculo con el uso de regla y compás solamente.



La duplicación del cubo

Una historia del origen del tercer problema, el de la duplicación del cubo, fue, como ya se dijo, que los habitantes de Delos recurrieron al oráculo de Delfos para saber cómo contener la plaga que invadió su ciudad. Se dice que el oráculo respondió que debían doblar en volumen el altar de Apolo. El altar era un cubo y el problema era el de su duplicación. Puesto que problemas acerca del tamaño y forma de los altares aparecen en las primeras manifestaciones de la literatura hindú, no es improbable que éste se introdujera en Grecia desde el este quizás por medio de Pitágoras. Era un problema familiar a los griegos en la quinta centuria a.C. ya que Eratóstenes informa que Eurípides se refiere a él en una de sus tragedias, la cual no se conoce a la fecha.

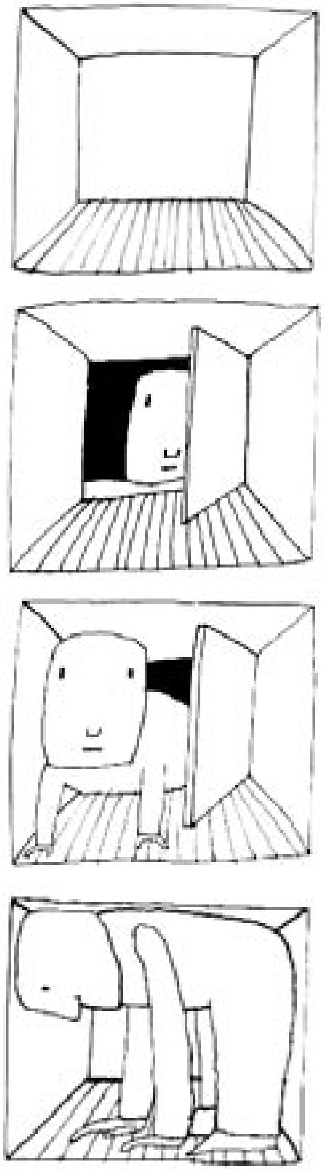
Los orígenes del problema de doblar el cubo pueden ser algo oscuros pero no hay duda de que los griegos sabían, desde hacía tiempo, cómo resolver el problema de duplicar el cuadrado. La mención de los matemáticos del periodo helénico que se ocuparon de él aparece brevemente expuesta en una carta de Eratóstenes enviada por éste a Ptolomeo III, rey de Egipto, con una solución propia y hasta con un instrumento con el cual se llevaba a cabo, prácticamente, la solución. Esa carta expresa: "Se cuenta que uno de los antiguos poetas trágicos hiciese aparecer en escena al rey Minos en el acto de ordenar la construcción de una tumba para su hijo Glauco y que advirtiendo que la tumba tenía en cada uno de sus lados una longitud de cien pies, exclamara: 'Escaso espacio en verdad concedéis a un sepulcro real; duplicadlo, conservando siempre la forma cúbica, duplicad de inmediato cada uno de los lados'". Es evidente que esto es claramente un error, puesto que duplicando los lados de una figura plana ésta se cuadruplica mientras que, si es sólida, se octuplica. Se agitó entonces entre los geómetras la cuestión de cómo podría duplicarse cualquier figura sólida manteniendo su especie, mismo problema que nos ocupa ahora.



"Se cuenta, además, que, más tarde, los habitantes de Delos, instados por el oráculo a duplicar el altar de Apolo, encontraron las mismas dificultades. Y algunos emisarios fueron enviados a los geómetras agrupados alrededor de Platón, en la Academia, a fin de excitarlos en la búsqueda del deseo del oráculo". Ellos se ocuparon con atención y se cree que el tercer problema lo resolvió Hipócrates después de muchos titubeos y que fue él quien primero pensó en una solución. Encontró que si entre dos rectas, una doble de la otra, se insertan dos medias proporcionales, se duplicará el cubo, con lo

Julio Cortázar

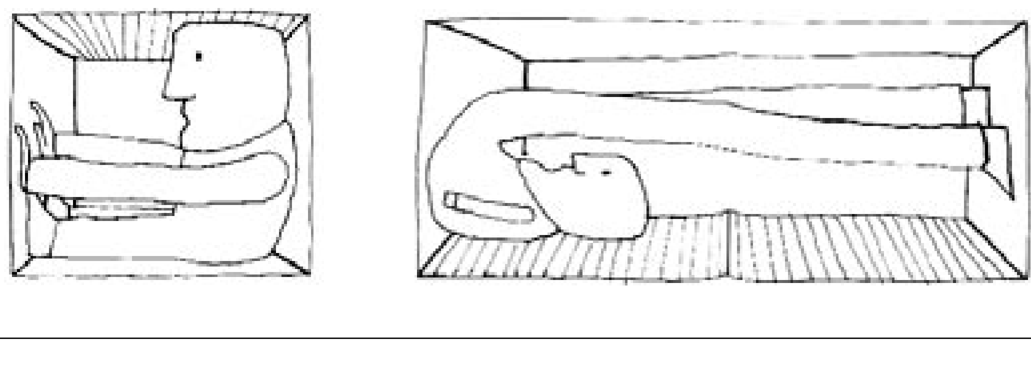
Toda **esfera** *es un* **cubo**



Desde luego el primer problema es como siempre mi tía. Decirle que toda esfera es un cubo y verla competir cutáneamente con una espinaca es todo uno. Se queda parada en la puerta, apoyada en la escoba, y me mira con ojos en los que adivino las ganas que tiene de escupirme. Después se va y barre el patio pero sin cantar los boleros que son la alegría de nuestra casa en la mañana.

La segunda dificultad está en la esfera misma. Apenas la coloco rotundamente sobre un plano inclinado, donde cualquier cubo se quedaría impertérrito, esta desgraciada saca todas la patitas y se tira al suelo como un relámpago, sin contar que además sigue viaje hasta abajo del ropero donde las pelusas, por rara coincidencia, están siempre reunidas en apretado número. Sacarla de ahí es una perfecta porquería, tengo que arremangarme y además soy alérgico a las pelusas y me pongo a estornudar de tal manera que grandes torbellinos de pelusas salen junto con el cubo y me llevan directamente a la crisis asmática, tengo que faltar a la oficina, el señor Rosenthal amenaza con descontarme un día de sueldo, mi padre saca a relucir las noches que pasaba en la intemperie cuando la expedición al desierto, mi tía acaba siempre por llevarse la esfera y ponerla donde la familia opina que debe estar, es decir en el estante del líving entre las obras del doctor Cronin y el pajarito embalsamado que fue de mi hermanito el que cerró los ojos en la primera infancia.

Mi padre me ha preguntado ya dos veces por qué me obstino en esas tonterías, y no me he dignado contestarle porque tanta pasividad me descorazona. ¿Será posible que todo el mundo acepte que esa bola maldita se dé el gusto de imponer su voluntad? Una vez más lucharé contra la esfera que es, lo sé, un cubo; la pondré en un plano inclinado, mi tía pasará a la espinaca, el ciclo de siempre, las pelusas. Entonces yo esperaré a curarme



que se convirtió una dificultad en otra no menor. Él resuelve el problema al hallar la intersección de dos parábolas o de una parábola y una hipérbola. Hipócrates no parece haber ido más allá, ni buscado alguna solución al problema plano. No por eso deja de ser menor su contribución al problema de la duplicación, aunque los métodos para resolverlo se acrediten a Menecmo.

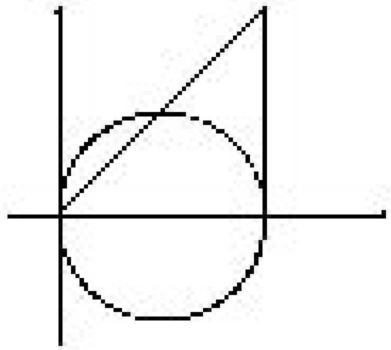
"Tratando de insertar dos medias proporcionales entre dos rectas, Arquitas de Taras, en el 400 a.C., lo consiguió con el semicilindro y Eudoxo, quien viviera del 406 al 355 a.C., con ciertas líneas curvas. A ellos los sucedieron otros en el intento de perfeccionar las demostraciones, aunque no en la realización de las construcciones y su adaptación a la práctica, si se exceptúa quizás a Menecmo que lo logró sin esfuerzo". Menecmo no sólo habría descubierto las cónicas sino que habría estudiado una serie de propiedades de éstas, por lo menos las suficientes como para dar dos sencillas soluciones al problema de Delos mediante la intersección de dos de esas curvas. Se dice que, al hacerlo, resolvió el problema de encontrar solución a las ecuaciones cúbicas.

Para justificar la solución de Menecmo al problema de Delos mediante intersecciones de cónicas, debe admitirse la posibilidad de que este geómetra conociera las propiedades de la parábola y de la hipérbola equilátera que hoy expresamos con las conocidas ecuaciones cartesianas de esas curvas. Lo que no advirtió este geómetra griego fue que esa solución también podía obtenerse de una de sus parábolas y una circunferencia: aquélla cuya ecuación se obtiene sumando las ecuaciones de las dos parábolas.

Arquitas había encontrado ya las dos medias proporcionales al resolver el problema con tres superficies de revolución. Eratóstenes afirma "de él se dice que las descubrió por medio de sus semicilindros". El problema de determinar dos segmentos medios proporcionales entre dos segmentos dados, uno doble del otro, lo resuelve Arquitas mediante una construcción estereométrica: mediante las intersecciones de una superficie cilíndrica, una superficie cónica y una superficie tórica. Su demostración es geométrica y se funda en las propiedades que resultan de las intersecciones de rectas y de circunferencias situadas en distintos planos. Es posible que Arquitas guiara a Menecmo a descubrir la solución por medio de las cónicas.

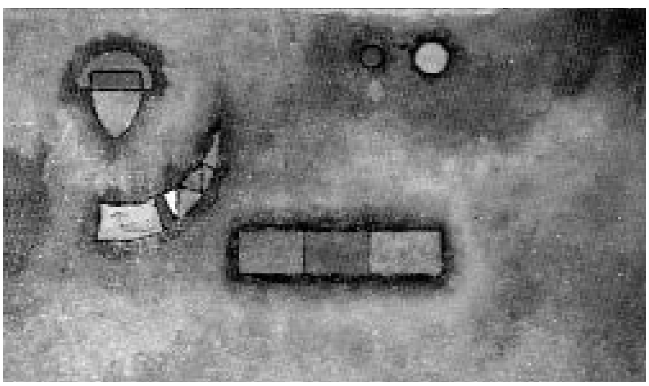
Con esta solución de Arquitas se ha vinculado la solución del problema de Delos que se atribuye a Eudoxo, admitiendo que éste resolviera el problema mediante la intersección del círculo, base de la superficie cilíndrica, con la proyección de la curva intersección de las superficies tórica y cónica. De esto no se tiene suficiente información: se dice de Eudoxo que era un matemático demasiado bueno para conformarse con una mera adaptación del método de Arquitas. Eratóstenes nos dice también que Eudoxo, un matemático muy original, resolvió el problema "por medio de las así llamadas líneas curvas", pero qué fueron esas líneas, no se sabe.

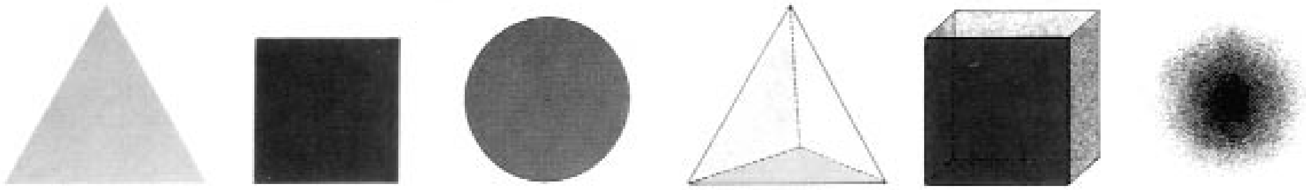
Se dice que Platón resolvió el problema por medio de un instrumento mecánico pero que rechazó este método



La bella solución de Arquitas a la duplicación del cubo es notable. Consistió en determinar un cierto punto como la intersección de tres superficies de revolución. No es una construcción plana sino tridimensional. Considere el círculo mostrado en la figura. Sea a su diámetro (OA) y b, la longitud de OB. Se trata de encontrar dos medias proporcionales entre a y b. Prolónguese el círculo a lo largo del eje z, perpendicular al plano del papel. La primera superficie de revolución es el medio cilindro OBA. La segunda, es la superficie del cono producida por OC cuando el triángulo OCA se rota alrededor de OA. La tercera superficie se produce considerando un semicírculo en el plano xz con OA como diámetro y rotándolo sobre OA, donde OA rota en el plano xy alrededor de O. Esta superficie es la mitad de un toro cuyo agujero es, solamente, el punto O. Llámese al punto donde se intersectan las tres superficies el punto P, que está sobre el medio cilindro y arriba de un punto N sobre el cilindro OBA. Las dos medias proporcionales construidas por Arquitas

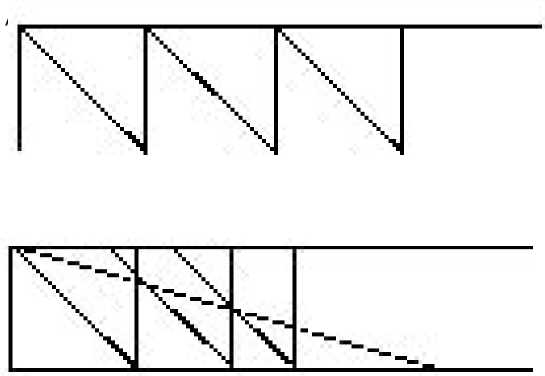
LA SOLUCIÓN DE ARQUITAS.





por no ser geométrico. Es muy dudosa la solución que se atribuye a Platón. Tal solución es muy simple, pues consiste en una determinación directa de las dos medias proporcionales a la que Hipócrates había reducido el problema. Pero obtener esa determinación mediante un instrumento, hecho que contradice abiertamente la concepción ideal que Platón tenía de la matemática, hace poco verosímil que esa solución pertenezca al filósofo ateniense. Joannes Philoponus, un filósofo cristiano de origen griego de la sexta centuria, nos dice que Apolonio tenía un método para encontrar las dos medias proporcionales. Sin embargo, la construcción supone un postulado que cuestiona todo el planteamiento.

Una de las soluciones más conocidas de la Antigüedad fue la de Diocles en el 180 a. C., quien utilizó una curva conocida como cisoide, según relata Arquímedes en su libro *Sobre la esfera y el cilindro* y según consta asimismo en *Sobre espejos incendiarios*. De acuerdo con el historiador Toemer, es un compendio de dieciséis proposiciones en geometría, principalmente probando resultados sobre cónicas.



Considere las dos líneas paralelas AX y EY y los triángulos entre ellas. Aquí AE y DH son las dos longitudes para las cuales se requiere encontrar las dos medias proporcionales. Fíjese el primer triángulo AMF y permítase deslizar a los triángulos MNG y NQH dentro del marco limitado por AX y EY. Rótese AX hasta que pase a través de D asegurándose que los puntos B y C, donde esta línea que rota corta a MF y NG permanece sobre los lados MG y NH de los dos triángulos los cuales se mueven hacia la izquierda para hacer posible esta configuración. Los triángulos se deslizan a la izquierda hasta que se alcanza la base de los diagramas. En el diagrama final, BF y CG son las dos medias proporcionales entre AE y DH.

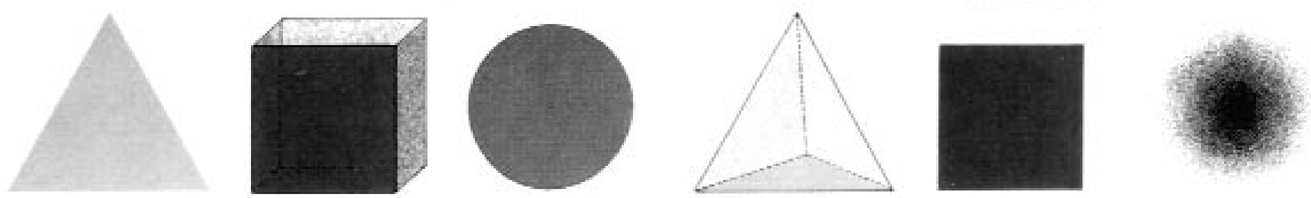
MECANISMO DE ERATÓSTENES PARA DUPLICAR EL CUBO

Si Hipócrates redujo el problema estereométrico de la duplicación del cubo a un problema planimétrico, Arquitas de Taras lo recondujo al espacio. Arquitas, general y estadista, pitagórico y amigo de Platón, se habría ocupado de astronomía, geodesia, mecánica práctica y geometría.

Aun cuando se inventaron muchos métodos para duplicar el cubo y se hicieron numerosos descubrimientos notables en el intento, los antiguos griegos nunca iban a encontrar la solución que realmente buscaban, esto es, una que pudiera hacerse con regla y compás. Nunca encontrarían tal construcción porque dicha construcción no puede hacerse. Sin embargo, no había forma de que los antiguos pudieran alguna vez probar tal resultado, puesto que requería matemáticas que iban mucho más allá de lo que ellos desarrollaron. Es justo decir, sin embargo, que aun cuando ellos no pudieron probar que una construcción de regla y compás era imposible, los mejores antiguos matemáticos griegos supieron, intuitivamente, que en verdad era imposible.

Varios autores posteriores han sugerido métodos para duplicar el cubo. Entre ellos están Vieta, Descartes, Fermat, de Sluze y Newton. Descartes consideró no solamente el problema de encontrar dos medias proporcionales, conforme se requería para resolver el problema, sino también considerar cuatro y Fermat llegó más lejos al considerar ciertas clases que involucran n medias proporcionales, una línea de trabajo que fue seguida posteriormente por Clairaut.

En el siglo XVII Viviani resolvió el problema con la ayuda de una hipérbola de segundo orden. Huygens, en 1654, dio tres métodos de solución. Newton, en 1707, sugirió varios métodos pero prefirió uno en el cual se hace uso de la *limaçon* de Pascal. Uno de los



métodos comparativamente recientes es el empleado por Montucci, quien hizo uso de una curva nueva.

Tanto la solución de Hipócrates al problema de Delos, que lo reduce, como decía Eratóstenes, a otro de dificultad no menor, como la de Arquitas, alarde de virtuosismo en la geometría espacial, apenas si merecen el nombre de soluciones. El reconocimiento de la imposibilidad de lograrla con regla y compás y la invención de curvas especiales para resolver los tres problemas clásicos señalan un progreso importante en la evolución del pensamiento griego, que sólo consideraba perfectas la circunferencia y la esfera, figuras con las que pretendía explicar el Universo, pretensión que perdura veinte siglos, aun en Copérnico, hasta la innovación kepleriana. Los nuevos geómetras griegos crean curvas con definiciones convencionales y hasta utilizan movimientos dando ingerencia a la cinemática: doble imperfección de la geometría que habría horrorizado a Platón.

Por último, conviene mencionar que algunas soluciones de estos problemas clásicos de la geometría griega están vinculados con un tipo característico de problemas griegos que hoy se designan con el nombre de "problemas de inserción". Así, según una construcción que se remonta al siglo V a.C., puede reducirse el problema de la trisección del ángulo a un problema de inserción.

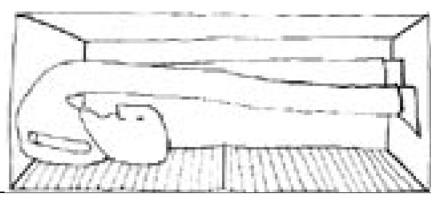
—Y así también podríamos seguir y seguir hablando... ¿resolví en algo tu pregunta?

—¡Qué interesante es todo eso! Cómo me gustaría leer al respecto... Solo que el inglés se me dificulta.

—Bien, trataré de escribir algo sencillo, de manera cualitativa...

—¡Mira!, dijo él, a tí que te gustan los sistemas planetarios, ¿qué te parece mi último diseño? Parece nuestra Vía Láctea, ¿cierto? Pero no, no es... Es un fractal.

Recibe pues este apretón de manos sin manos
y dime ahora:
¿Cómo fue el viaje hasta arriba?
¿Es hermoso allá sin vendedores?
¿En verdad tienes vida verdadera?



Laura Elena Morales Guerrero
Instituto de Matemáticas,
Universidd Nacional Autónoma de México.

Agradecimientos
A los Drs. John J. O'Connor y Edward F. Robertson del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de St. Andrews en Escocia por la valiosa información contenida en su página.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. B. 1968. History of Mathematics. John Wiley.
Dirk J. Struik. 1980. Historia concisa de las matemáticas. México, IPN.
Smith, D. E. 1951. History of Mathematics, vols. 1 y 2. Nueva York, Dover Publications Inc.
Rey Pastor, J. y J. Babini. 1951. Historia de la Matemática. Argentina, Espasa-Calpe.
A History of Greek Mathematics. 1931, vols. I y II. Oxford.