

¿Cómo concibe la mayoría de la gente a las matemáticas? Parece que ésta no es una pregunta sencilla y tiene muchas posibles respuestas. Para los matemáticos, por ejemplo, no sólo son útiles, sino fundamentalmente amenas, interesantes y absolutamente bellas. Quienes se dedican al estudio de otras disciplinas científicas saben que con ellas se puede entender el Universo. Los sucesos físicos, químicos o biológicos que nos rodean, e incluso los económicos y sociales, pueden ser explicados por el lenguaje matemático. Las matemáticas nos han facilitado la creación de mapas y la navegación, la construcción y la perspectiva en el arte, la radio, la televisión, el teléfono, la computadora, en fin, la lista es inacabable, pero aunque la mayor parte de las personas reconoce que son una

su entorno. Así, por ejemplo, hemos usado gráficas para indicar en un mapa las rutas de acceso entre ciertas ciudades o poblados, o para señalar accesos comerciales o de comunicación entre ellos; las usamos al dibujar e identificar las constelaciones en la esfera celeste o cuando representamos nuestras relaciones familiares en un árbol genealógico; hacemos gráficas también para establecer las jerarquías en la estructura de una empresa o de cualquier organismo en el que se pueda identificar un orden, como el gobierno o el ejército. De hecho, es casi seguro que toda persona haya dibujado gráficas alguna vez en su vida. Cualquier sistema que involucre una cierta colección de objetos y alguna “regla” que relacione parejas de los mismos puede ser representado mediante una gráfica.

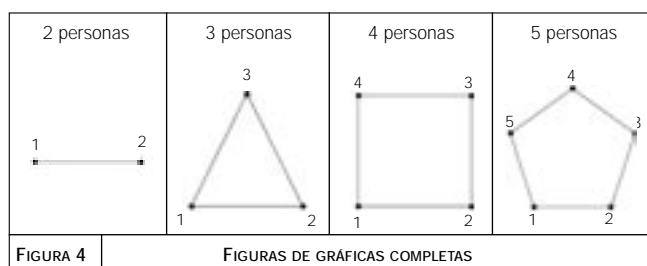
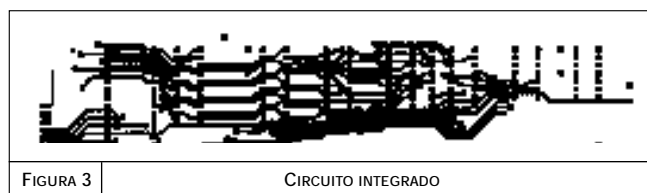
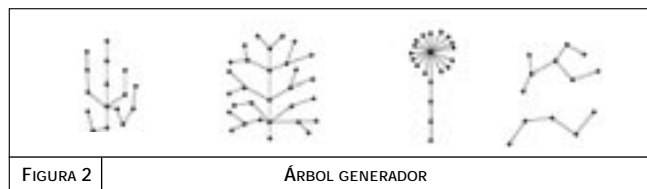
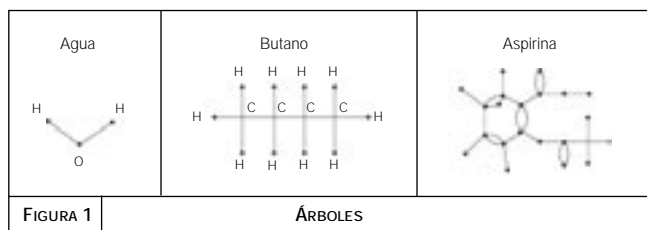
Un vistazo a la **teoría de gráficas**

herramienta útil para “resolver problemas” de la vida común, cuando oyen hablar de ellas casi siempre recuerdan algún tipo de experiencia desagradable.

Digamos entonces que si bien no es tan fácil advertir su belleza, al menos sí son célebremente distinguidas por su utilidad en la resolución de problemas. Y es que ésta es una de sus características primordiales: su versatilidad. Cuando encontramos un problema de la “vida real”, siempre podemos hacer de él una descripción o un modelo matemático. Aunque, siendo francos, lo más común es que encontrar este modelo sea en sí mismo un obstáculo, a veces tan o más complicado que el problema mismo.

En este sentido, desde tiempos lejanos el ser humano ha recurrido de un modo muy natural al uso de las gráficas para tratar de representar problemas o situaciones de

La rama de las matemáticas que estudia estos objetos se conoce como teoría de gráficas, y surgió en el siglo XVIII, época en que los matemáticos veían en las gráficas un simple divertimento. Es por eso que no resulta sorprendente que gran parte de los resultados obtenidos inicialmente en esta área hayan surgido a partir de acertijos y pasatiempos. Fue hasta la última mitad del siglo pasado cuando el interés por la teoría de gráficas se incrementó notablemente. Desde luego, las razones de tal fenómeno son muchas, aunque otra vez su versatilidad parece ser determinante: se ha encontrado una enorme diversidad de aplicaciones de la teoría de gráficas en muchas áreas del conocimiento. Así, la vemos haciendo aportaciones en biología, ingeniería civil, arquitectura, genética, economía, antropología, lingüística, química,



física, economía y, por supuesto, en otras áreas de las matemáticas.

Y a todo esto, ¿qué es una gráfica? Como objeto matemático, una gráfica es un par de conjuntos; el primero de ellos no puede estar vacío y a sus elementos los llamamos vértices; el otro está formado por “parejas” de vértices, las cuales son denominadas aristas. Representar una gráfica mediante un dibujo en papel o en un pizarrón es un procedimiento muy sencillo: únicamente ponemos puntos o pequeños circulitos para representar a cada uno de los vértices, y líneas o curvas entre las que forman una arista.

Sus usos son muy variados. Los químicos usan las gráficas para dibujar moléculas. En 1857 Cayley descubrió una importante clase de gráficas, llamadas árboles en la química orgánica y las usó para representar los isómeros de los hidrocarburos saturados. De este modo Cayley descubrió cuántos isómeros (es decir cuántos árboles) existen para un número dado de átomos de carbono (figura 1).

Los físicos teóricos han utilizado las gráficas de múltiples maneras. Por ejemplo, en mecánica se utilizan gráfi-

cas en las que los vértices representan moléculas, y cuando dos de ellos son adyacentes indican algún tipo de interacción física, tal como repulsión o atracción magnética. De manera similar, Feynman usó gráficas en las que los vértices representan partículas físicas, y las aristas trayectorias de las mismas después de colisionar.

Kirchhoff también hizo descubrimientos en la teoría de gráficas cuando intentaba resolver el sistema de ecuaciones lineales simultáneas obtenido por el paso de corriente en cada circuito de una red eléctrica. Así, abstraigo de la red eléctrica —con sus resistencias, condensadores, inductancias y demás—, una estructura consistente sólo de puntos y líneas sin indicar el tipo de elemento eléctrico que representaban. Mediante la “gráfica subyacente” a la red eléctrica, notó que el problema original podía ser resuelto más fácilmente sin considerar los ciclos que se formaban, utilizando lo que hoy conocemos como “árbol generador” (figura 2).

Las gráficas se utilizan al diseñar circuitos integrados impresos en *chips* de silicón, que son usados en dispositivos electrónicos —ésta es una de las aplicaciones más importantes de lo que conocemos como gráficas planas— que deben ser diseñados de tal modo que las porciones conductoras no se crucen entre sí (figura 3).

Actualmente, los psicólogos representan el “espacio vital” de un individuo mediante un mapa, el cual es asociado a una gráfica; de hecho las investigaciones acerca de las “dinámicas de grupo” utilizan con frecuencia gráficas en las que los vértices representan personas y las aristas algún tipo de relación interpersonal.

Las gráficas también han sido una útil herramienta en otras ramas de las matemáticas, como la teoría de grupos, el análisis numérico, la probabilidad, la topología, la combinatoria, la teoría de algoritmos y computación, y muy particularmente en lo que se refiere al estudio y representación de estructuras abstractas de datos. En el área conocida como investigación de operaciones, las gráficas juegan un papel relevante —ahí se les conoce como redes y casi siempre son dirigidas, es decir, a cada arista se le agrega “una flecha” que indica una dirección— y se utilizan principalmente para la planeación de actividades y el diseño de sistemas de comunicación o distribución de bienes y servicios.

Coloreando gráficas

Situémonos por un momento en nuestra última fiesta de fin de siglo: la noche del 31 de diciembre de 2000. Pensemos en el momento preciso de las doce campanadas y los

abrazos de fin de año. ¿Podremos saber cuántos abrazos hubo esa noche en nuestra fiesta?, es decir, ¿cuántos hubo si sólo había en ella dos personas?, ¿cuántos si asistieron tres, cuatro o cinco?, ¿cuántos si asistieron n personas?

Probablemente contar el número de abrazos en cada caso resulte latoso, sin embargo, una gráfica puede simplificar el conteo (figura 4). Los vértices representan a los asistentes a la fiesta y cada arista indica un abrazo entre las personas que representan sus vértices. Hemos colocado todas las aristas posibles pues suponemos que hubo abrazos entre cualquier par de personas en la fiesta. Es evidente que el único abrazo no incluido es el de una persona a sí misma. Si sólo hubieran asistido dos personas, entonces habría habido un solo abrazo, si hubieran sido tres habrían sido tres los abrazos, si cuatro, entonces seis, etcétera. ¿Cómo contamos?, fácilmente: cada persona abraza a cualquier otra en la fiesta menos a sí misma y cada abrazo lo contamos dos veces (una por cada uno de los involucrados en el abrazo) entonces, si asisten n personas tenemos la fórmula abrazos entre n personas

$$\text{número de abrazos} = \frac{(n(n-1))}{2}$$

A las gráficas que utilizamos aquí para representar este problema se les conoce como gráficas completas; en ellas todos los vértices están unidos entre sí por una arista, y si hay n vértices tenemos $(n(n-1))/2$ aristas. La gráfica completa de n vértices se denota como K_n .

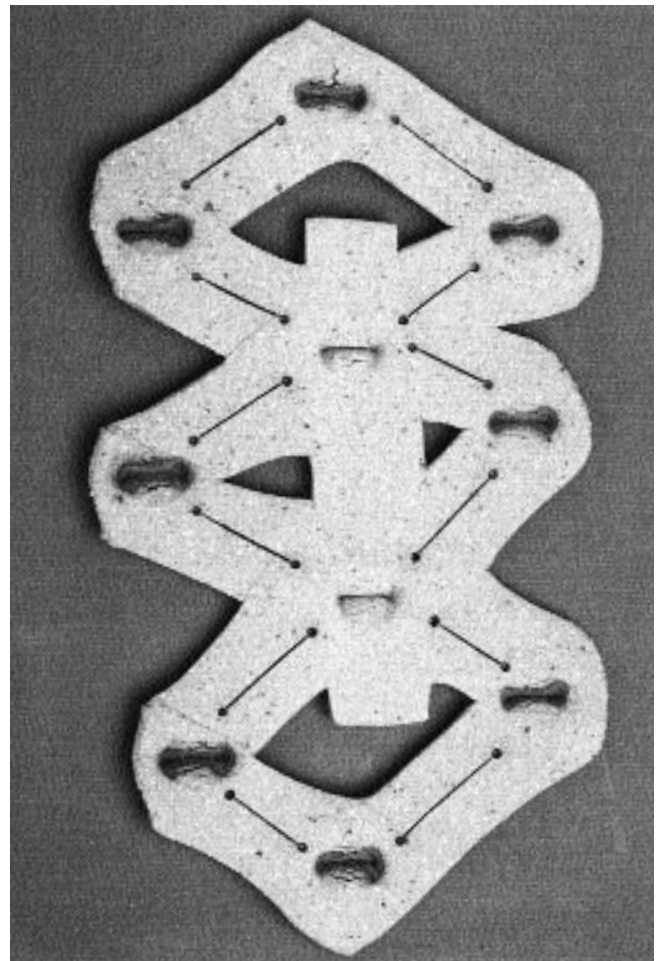
Nos atrevemos ahora a afirmar lo siguiente: "Si a una reunión asisten seis personas, hay tres de ellas que se conocen entre sí o tres que no se conocen entre sí". Traduciremos esta afirmación al lenguaje de la teoría de gráficas. En primer lugar, etiquetemos a cada una de las personas con un número del 1 al 6, y representémoslas con vértices. Pondremos entre dos vértices una línea negra si ellos representan a dos personas que se conocen y una línea verde si son desconocidas. En la figura 5, por ejemplo, la persona 1 conoce a las personas 2, 3, 4 y 5, y no conoce a la persona 6.

Mediante esta representación, obtenemos la gráfica completa con seis vértices, K_6 , cuyas aristas están coloreadas con dos colores. La "traducción" de nuestra afirmación inicial es lo que se conoce como el teorema de Ramsey: "Siempre que coloreamos las aristas de K_6 con dos colores diferentes encontramos al menos un triángulo monocromático (es decir, un triángulo "de un solo color").

Para nuestro ejemplo un triángulo negro indica tres personas que se conocen mutuamente y uno verde a tres que no se conocen.

La prueba o demostración de este teorema es muy sencilla: Elijamos un vértice cualquiera de la gráfica, supongamos que tal vértice es el 1. Éste tiene cinco vecinos: 2, 3, 4, 5 y 6, y de las cinco aristas que salen de él hay al menos tres que tienen el mismo color, digamos que ellas son 12, 13, 14 y que son negras. Si alguna de las aristas 23, 24 o 34 es negra, como la 23, entonces tenemos un triángulo monocromático negro, el formado por los vértices 1, 2 y 3 (figura 5a). Si, por el contrario, las tres son verdes tenemos un triángulo monocromático verde: el de los vértices 2, 3 y 4 (figura 5b).

Observemos que la demostración hubiera sido igual si las tres o más aristas del mismo color hubieran sido verdes; también pudimos haber escogido cualquier otro vértice en lugar del 1, pues todos tienen el mismo comportamiento, es decir, que nuestra gráfica es simétrica.



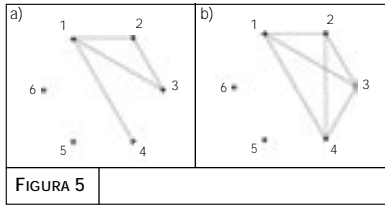


FIGURA 5

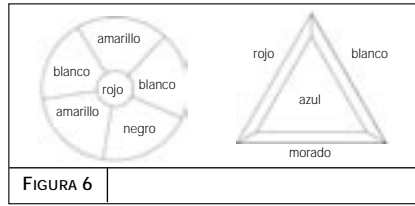


FIGURA 6

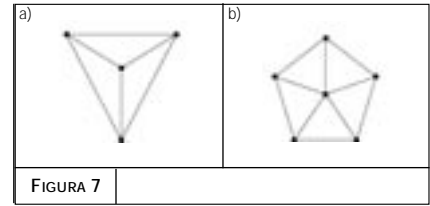


FIGURA 7

La demostración que dimos aquí del teorema de Ramsey es ejemplo de una estrategia muy común dentro de la teoría de gráficas, que es la coloración. En este caso coloreamos aristas, pero también se colorean vértices.

La coloración de gráficas ha sido estudiada desde muy diversos ángulos y con distintos propósitos. Se han obtenido grandes resultados por su relevancia matemática pero, sobre todo, sorprendentes por su belleza, por supuesto, desde una óptica matemática.

Hablaremos ahora de un famoso resultado conocido como el problema de los cuatro colores, y cuyo planteamiento como problema de gráficas tiene que ver con coloraciones de vértices. Fue planteado en 1852 y es conocido prácticamente por todos los matemáticos que han surgido desde entonces, la mayoría de los cuales —nos atrevemos a asegurar— han tratado de resolverlo. En los muchos intentos por solucionarlo han participado casi todas las ramas de las matemáticas, lo que ha propiciado la generación de una gran riqueza de conocimientos. Recientemente, este problema ha sido abordado con amplitud, haciendo uso de computadoras y usando estrategias y programas que realizan cálculos durante aproximadamente mil horas.

Su planteamiento es realmente sencillo: cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa plano con la condición de que cualquier par de regiones vecinas, es decir, con “frontera” común, tengan colores distintos, de acuerdo con lo cual, dos países del mismo color podrían compartir un punto o un número finito de puntos pero no una línea (un número infinito de puntos), que representa a la frontera entre ellos.

En los mapas que aparecen (figura 6) se muestra que los cuatro colores son necesarios para colorear un mapa en las condiciones dadas. La pregunta que hay que resolver es si para cualquier mapa estos cuatro colores son suficientes. Nuevamente traslademos este problema al contexto de la teoría de gráficas. Ahora representaremos a cada región del mapa con un vértice y habrá una arista entre dos vértices si las regiones a las que corresponden tienen frontera común. Así, las gráficas de la figura 7 corresponden a los mapas de la figura 6 a y b respectivamente.

Este problema nos permite introducir el concepto de gráficas planas, que son las que podemos dibujar en el plano, de modo que sus aristas no se crucen, salvo en sus vértices. Cuando decimos plano nos referimos a alguna superficie plana, una hoja, un cuaderno, un pizarrón, etcétera. Si una gráfica puede dibujarse de este modo, decimos que es plana (figura 8) o que tiene un dibujo plano (figura 9). Como a cualquier gráfica plana le corresponde un mapa sobre el plano, entonces el teorema de los cuatro colores afirmaría que son suficientes cuatro tonos para colorear los vértices de una gráfica plana con la condición de que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color.

La banda de Möbius

Aunque la definición formal de gráfica resulta un poco “abstracta”, pues se establece en términos de conjuntos, la tendencia “natural”, cuando hablamos de gráficas, es pensarlas ya dibujadas en el plano como lo hemos hecho

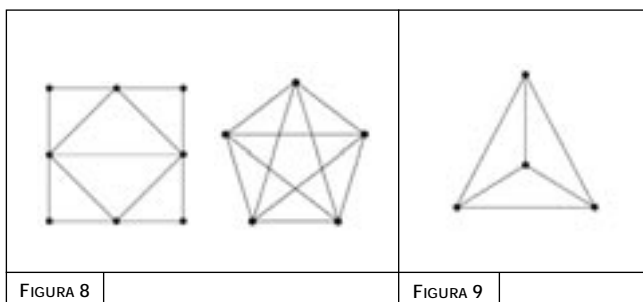


FIGURA 8

FIGURA 9

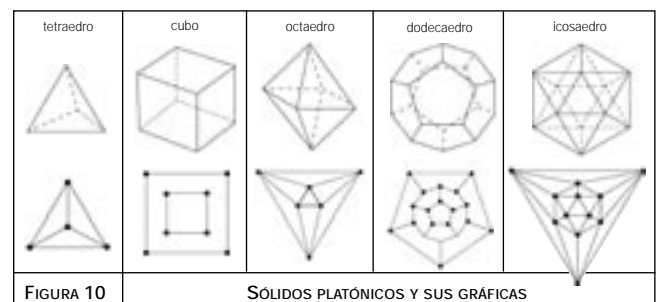


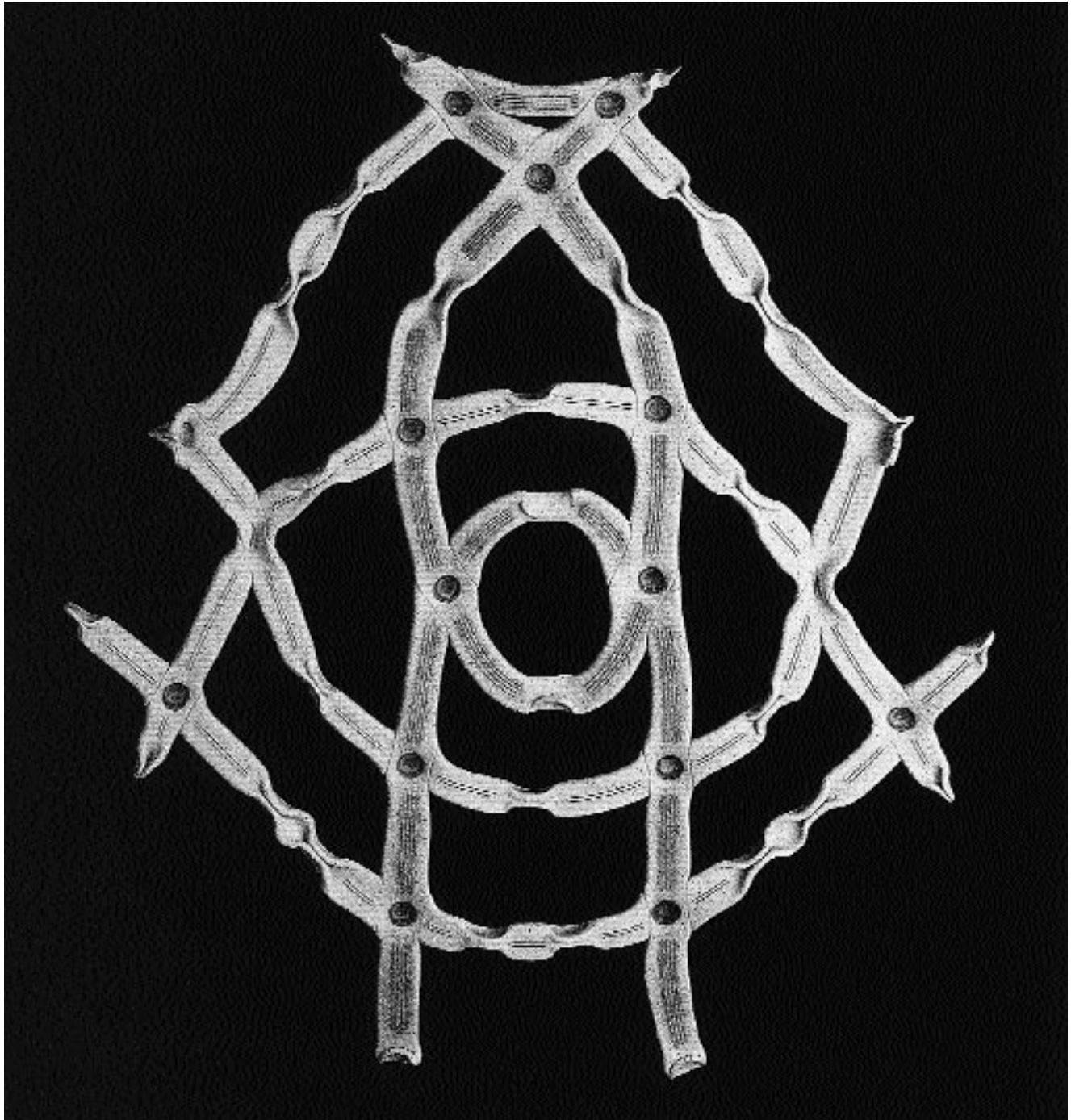
FIGURA 10

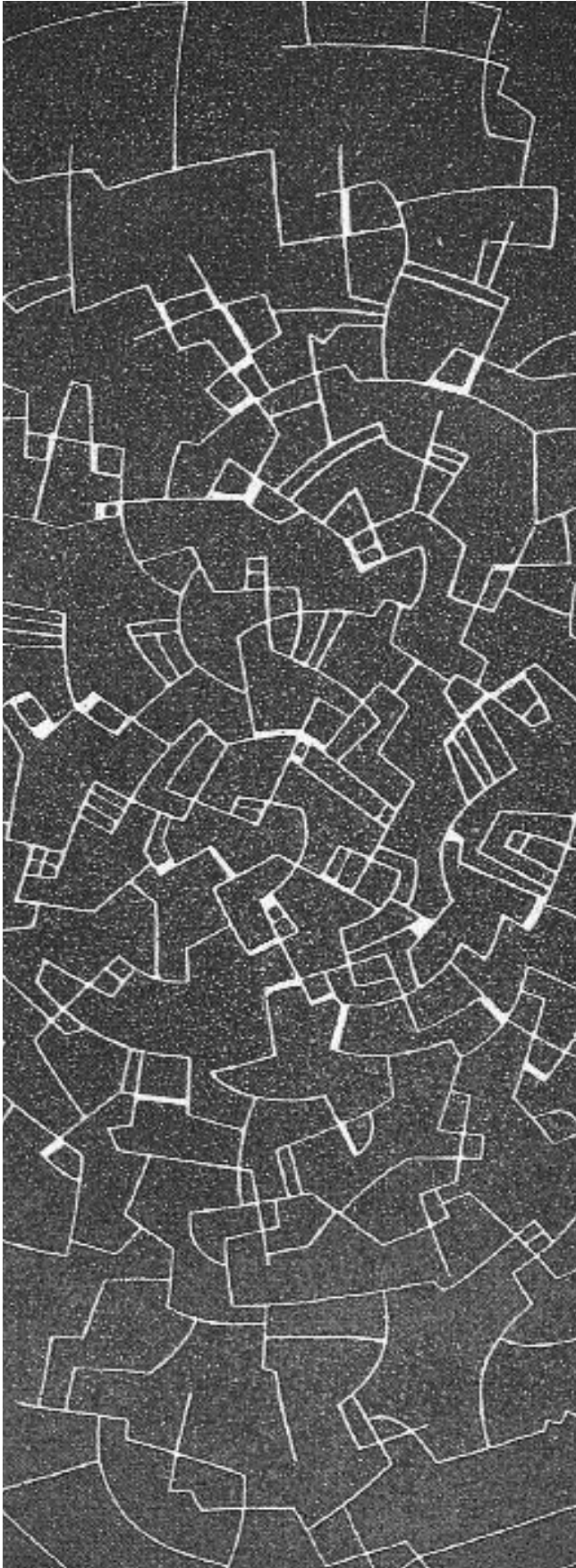
SOLIDOS PLATÓNICOS Y SUS GRÁFICAS

hasta ahora, con puntos que representen los vértices y líneas o curvas entre aquellos que formen una arista. Sin embargo, también podríamos haberlas pensado en otro tipo de superficies; por ejemplo, ¿cómo se vería alguna de las gráficas que hemos presentado dibujada en una esfera?, ¿o en una taza?, ¿o en la superficie de un poliedro?

Hay dos aspectos importantes que debemos resaltar. Primero, que cualquier dibujo de una gráfica es comple-

tamente independiente de la gráfica en sí misma, o sea, que éste no altera las propiedades de aquella, únicamente nos ayuda a estudiarla mejor. Cuando hablábamos un poco antes de las gráficas planas, por ejemplo, un dibujo adecuado nos permite decidir si ella es plana o no; si podemos encontrar un dibujo plano de una gráfica, entonces decimos que es plana. En segundo lugar, notemos que cualquier gráfica con un dibujo plano puede también di-





bujarse sin cruces en la superficie de una esfera. Por ejemplo, en la figura 10 mostramos los famosos sólidos platónicos: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Podemos pensarlos como poliedros, suponiéndolos huecos y tomando únicamente la superficie que forma sus “cáscaras”, o podemos imaginarlos como gráficas y aplanarlos como se muestra en la figura.

Éstas son unas de las gráficas planas más famosas que se han estudiado hasta ahora. Por supuesto existen también gráficas que no son planas, como K_5 , la gráfica completa de cinco vértices, que es el ejemplo más sencillo de este caso (figura 11). Sin embargo, pueden existir otras superficies donde sí sea posible dibujar una gráfica no plana sin que haya aristas que se crucen. Por ejemplo, para el caso de K_5 , la superficie de una dona, conocida también como toro, es ideal para dibujarla —podríamos hacerlo en una taza (figura 12), aunque puede dibujarse sin cruces en otra superficie “más sencilla”. Ésta es una de las más interesantes y curiosas en matemáticas: la banda de Möbius, cuya peculiaridad radica en que, a pesar de dar la impresión de ser una superficie con “dos lados”, en realidad solamente tiene uno. Es decir, si nos imaginamos que uno puede “recorrer caminando” esta superficie iniciando desde un punto cualquiera y seguir y seguir caminando (siempre hacia adelante), cuando lleguemos nuevamente al punto de inicio ¡estaremos de cabeza! El famoso dibujo de Escher de las hormigas andando sobre una banda de Möbius ilustra claramente esta situación (figura 13).

La firma del diablo

Ya habíamos visto antes un dibujo no plano de K_4 . Notemos que el punto del centro donde se cruzan las dos diagonales del cuadrado no es un vértice. Esta figura es conocida como “la firma de diablo” y debe su nombre a la imposibilidad de recorrer todas las aristas de la gráfica sin repetir ninguna, sin levantar el lápiz del papel y regre-

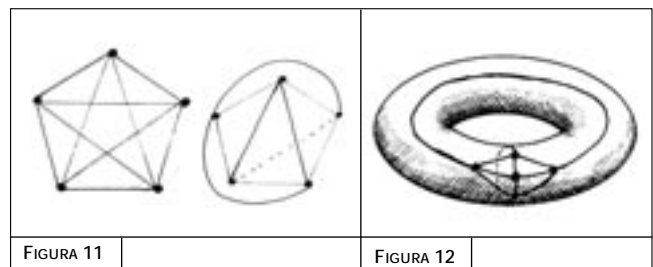


FIGURA 11

FIGURA 12

sando al mismo punto donde se inició el dibujo. Pensando en esta figura como una gráfica, lo que tratamos de hacer es encontrar un recorrido cerrado que pase por todas sus aristas exactamente una vez. Esto se conoce en la teoría de gráficas como recorridos eulerianos y debe su nombre al matemático suizo Leonard Euler, considerado el padre de la teoría de gráficas. Él logró resolver en 1736 un famoso acertijo de su época conocido como el problema de los puentes de Königsberg.

Sucede que por esa ciudad, (la cual, por cierto, ahora ya no tiene ese nombre), cruzaba el Río Pregel, en el que había dos islas unidas entre sí, conectadas a la rivera por siete puentes (figura 14).

El problema era el siguiente: iniciar en alguna de las cuatro porciones de tierra y hacer un “paseo” por la ciudad, atravesando por cada puente exactamente una vez, y regresando al punto de inicio.

En principio se trató de resolver este problema empíricamente, es decir, intentando encontrar tal paseo mediante prueba y error. Muchísimos experimentos fallidos hacían pensar en su imposibilidad, aunque nadie se atrevía a afirmar que así fuese, y en todo caso tampoco sabían explicar cuál era la razón de la inexistencia del mismo.

La gran contribución de Euler fue el demostrar rigurosamente que, en efecto, tal paseo era imposible; para ello utilizó por primera vez el concepto de gráfica como lo conocemos ahora. Euler representó el mapa de Königsberg mediante una gráfica: a cada porción de tierra la representó con un vértice y a cada uno de los puentes como una arista, de modo que dos vértices adyacentes en la gráfica indicaban dos porciones de tierra unidas mediante uno de los puentes (figura 15).

De hecho, no sólo respondió a la pregunta original, sino que logró dar una condición necesaria y suficiente para decidir si una gráfica cualquiera contiene un recorrido cerrado que pase por todas y cada una de las aristas exactamente una vez. Ese primer teorema de gráficas se enuncia así: “Una gráfica es euleriana si y sólo si a cada uno de

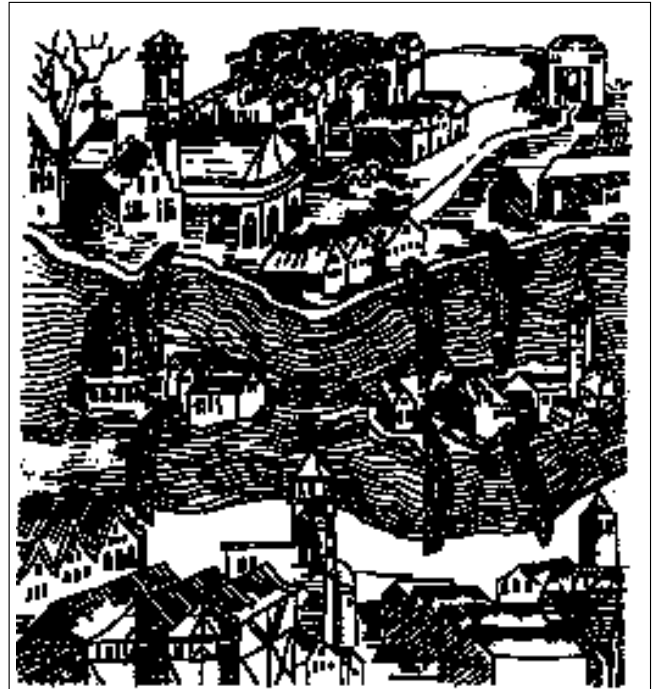


FIGURA 14

LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

sus vértices llega un número par de aristas (distinto de cero)”.

Evidentemente, ni la gráfica que representa a la ciudad de Königsberg ni la firma del diablo son gráficas eulerianas, y por tanto el camino que se busca en cada caso es inexistente.

La demostración de este teorema también es bastante sencilla: notemos primero que si la gráfica es euleriana, entonces sí es posible hacer el recorrido que se busca, ya que éste pasa por todos los vértices de la gráfica —pues pasa por todas las aristas. Cada vez que “toca” algún vértice utiliza una arista para llegar, y enseguida necesita una nueva arista para salir de él. Notemos que no se usa otra vez la arista con que llegamos, pues el recorrido no las repite. Así, cada “toque” de algún vértice por el recorrido representa dos aristas que inciden en él, lo cual se cum-

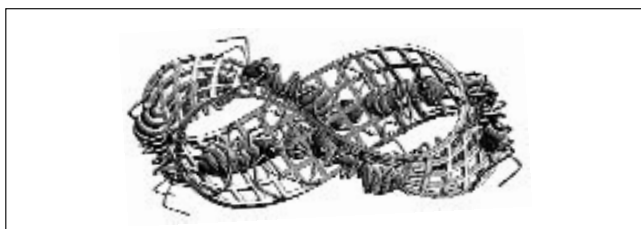


FIGURA 13

LA BANDA DE MOBIUS

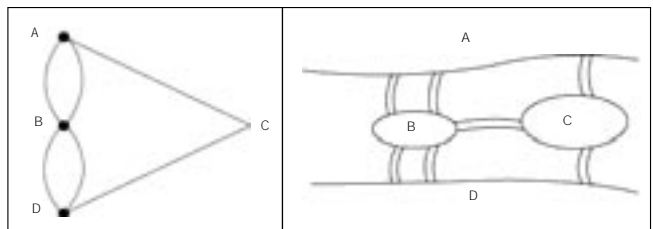


FIGURA 15

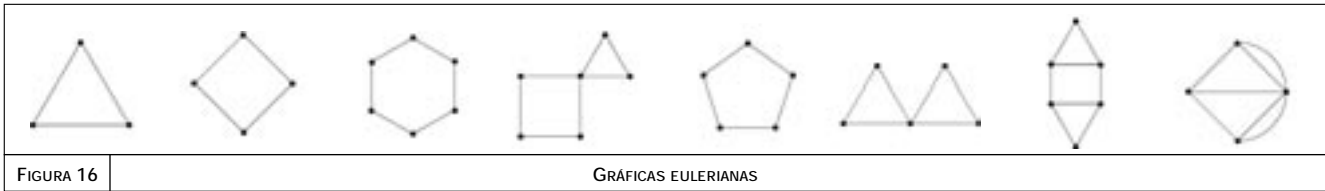


FIGURA 16

GRÁFICAS EULERIANAS

ple también para el vértice que se haya escogido como inicio del recorrido (y final, pues es cerrado), y, por tanto, en cada vértice incide un número par de aristas: exactamente el doble de las “visitas” realizadas por el recorrido al vértice en cuestión.

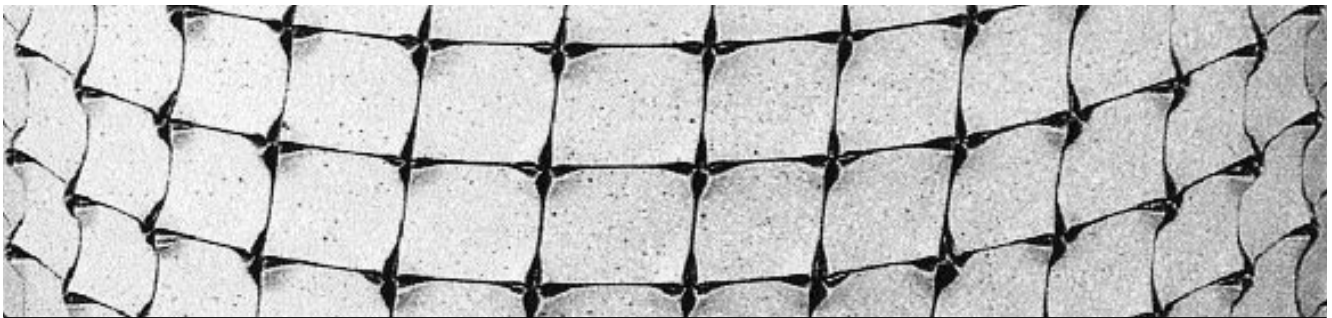
Ahora bien, si partimos de que en la gráfica se cumple que a cada vértice llega un número par de aristas, se puede demostrar que la gráfica es euleriana (figura 16).

Cualquier polígono puede ser pensado como una gráfica, y a los n -ángulos (polígonos regulares de n lados) se les llama *ciclos* en la terminología de la teoría de gráficas. Es evidente que los ciclos son gráficas eulerianas.

Hemos visto pues que las gráficas son objetos realmente atractivos, intuitivamente fáciles de entender y, como mencionábamos al principio, sumamente versátiles. En la actualidad, esta teoría ocupa un lugar relevante dentro de la investigación en matemáticas, contando con el tiempo y la atención de muchos matemáticos en

todo el mundo. Es impresionante observar el desarrollo explosivo que esta rama tuvo en la última mitad del siglo pasado, lo que tiene que ver quizá con las brillantes incursiones que hizo en otras áreas del conocimiento humano, aunque definitivamente sus principales aplicaciones se encuentran en las ciencias de la computación, área en la que los avances han sido gigantescos.

Puede ser que éste sea un fenómeno de crecimiento paralelo, en el que una y otra área obtienen logros significativos en forma simultánea, y que generan como consecuencia avances tecnológicos importantes —evidentes para la mayoría de las personas. A su vez, este desarrollo tecnológico contribuye decididamente a la creación del nuevo conocimiento teórico al proporcionar herramientas de experimentación y búsqueda cada vez más eficientes, acelerando con ello el desarrollo al que nos referíamos. Entonces se crea una especie de círculo sin fin de avance común entre varias esferas del conocimiento. 🚀



Gabriela Araujo Pardo y Pilar Valencia Saravia
Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México.

Hartsfield, Nora y Gerhard Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory, a Comprehensive Introduction*. Academic Press.

López de Medrano Santiago. 1972. *Gráficas. Programa nacional de formación de profesores*. ANUIES.

Magnus Enzensberger, Hans. 1999. *El diablo de los números*. Siruela, Madrid.

Melnikov O., V. Sarvanov, R. Tyshkevich, V. Yemelichev e I. Zverovich. 1998. *Exercises in Graph Theory*. Kluwer Academic Publishers.

Saaty L. y P. C., Kainen. 1986. *The four-color Problem*. Dover Publication.

IMÁGENES

Gustavo Pérez, p. 56: *Nahual*, pastillaje, 43 x 32 x 1 cm, 1993; p. 59: pieza de la exposición “Pruebas y errores”; p. 61: *Chanegue*, pastillaje, 41 x 35 x 1 cm, 1993; *Bol* (fragmento), torno, £52 cm, h 10 cm, 1994; *Vaso* (fragmento), torno, h 41 cm x £21 cm, 1994.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chartrand, Gary. 1992. *Introductory Graph Theory*. Dover Publication.

Diestrel, Reinhard. 2000. “Graph Theory. Graduate Text in Mathematics”, en *Springer*, núm. 173.