

Un conjunto de **Cantor** en la 3ª Suite de Bach para violoncello

Aunque en el siglo XVIII todavía no existía el conjunto de Cantor ni el concepto de fractal, éstos ya se encontraban en la naturaleza. Y los creadores, en particular los músicos, plasman en su obra tanto la naturaleza que observan como su época. Johann Sebastian Bach es tal vez uno de los mejores ejemplos; en su obra podemos observar que en su momento ya existían las estructuras de los conjuntos de Cantor, así como la idea generadora de los fractales.

Hasta hace algunos años se consideraba que los conjuntos de Cantor eran una creación puramente matemática, totalmente alejados de la naturaleza y el arte; sin embargo, ahora se sabe que el comportamiento de algunos fenómenos naturales presentan una estructura similar y en el caso del arte tenemos este bello ejemplo que nos regaló Johann Sebastian Bach en su 3ª Sui-

te para violoncello, compuesta en la segunda década del siglo XVIII.

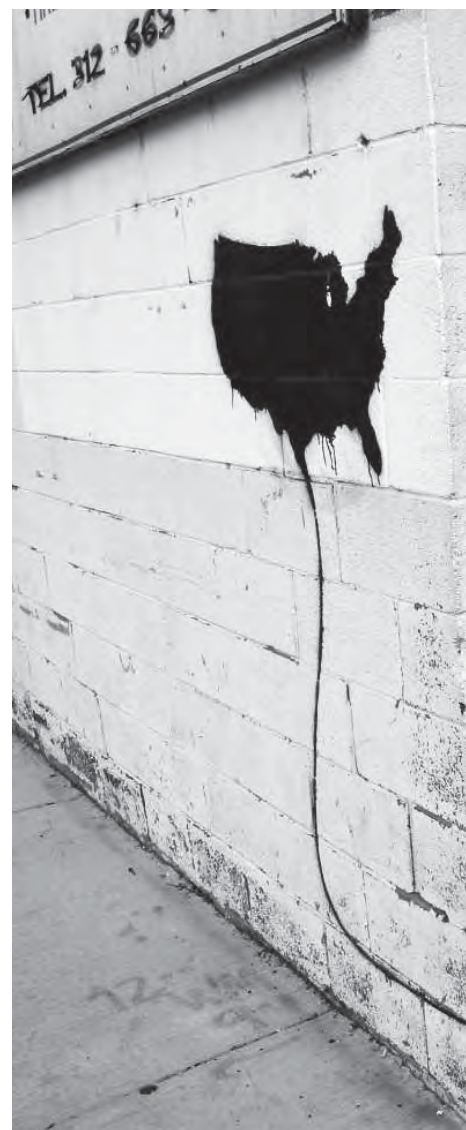
El conjunto ternario de Cantor

El conjunto de Cantor toma su nombre del matemático George Cantor, que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: el continuo. Su verdadero creador fue Henry Smith, un profesor de geometría de Oxford, quien en 1875 definió lo que ahora conocemos como los conjuntos generalizados de Cantor.

El conjunto ternario de Cantor se obtiene procediendo del siguiente modo: partimos de un segmento del tamaño que se muestra en la etapa 1 de la figura 1a; lo dividimos en tres subsegmentos iguales y nos quedamos con los intervalos cerrados de los extremos, obteniendo así el resultado de la eta-

pa 2. Si repetimos la división en tres partes en cada uno de estos segmentos, y nos quedamos de nuevo con los intervalos cerrados de los extremos en cada uno, obtenemos los cuatro intervalos de la etapa 3. Para la etapa n , dividimos en tres partes cada uno de los segmentos de la etapa anterior y nos quedamos con los intervalos cerrados de los extremos en cada uno. Repetimos este procedimiento tantas veces como números naturales hay, y el conjunto resultante es el conjunto ternario de Cantor.

Un fractal se obtiene al repetir o iterar un proceso sencillo (o complejo) muchas veces (una infinidad, si se piensa como matemático, o un número muy grande de veces si se quiere ser más pragmático). Con estas iteraciones se obtiene un objeto que está formado por partes que son parecidas en estructura al objeto comple-



Flor de María Aceff Sánchez



to, que a su vez están compuestas también por subpartes con la misma característica, y así sucesivamente. Estas repeticiones o iteraciones del proceso pueden ser contractivas o expansivas.

En las iteraciones contractivas se va fragmentando el objeto al cual se le está aplicando el proceso, de tal modo que los fragmentos se van pareciendo al todo resultante. Un ejemplo de un proceso fractal contractivo es el proceso explicado anteriormente para el Conjunto Ternario de Cantor. En las iteraciones expansivas se va construyendo el fractal como si tuviéramos bloques de construcción que vamos acomodando de acuerdo a la regla del proceso iterativo.

Veamos cómo podemos construir el conjunto ternario de Cantor con un proceso iterativo expansivo (figura 1b). Tomemos un bloque en etapa 1; en la etapa 2, tomemos

dos bloques iguales (como el de la etapa 1) y acomodémoslos con una separación entre ellos del mismo tamaño del bloque; en la etapa 3, tomemos dos construcciones iguales a las de la etapa 2 y acomodémoslas con una separación entre ellas del mismo tamaño a la de la construcción de la etapa 2, y así sucesivamente; la etapa n está formada por dos construcciones iguales a las obtenidas en la etapa anterior, separadas por un espacio del mismo tamaño.

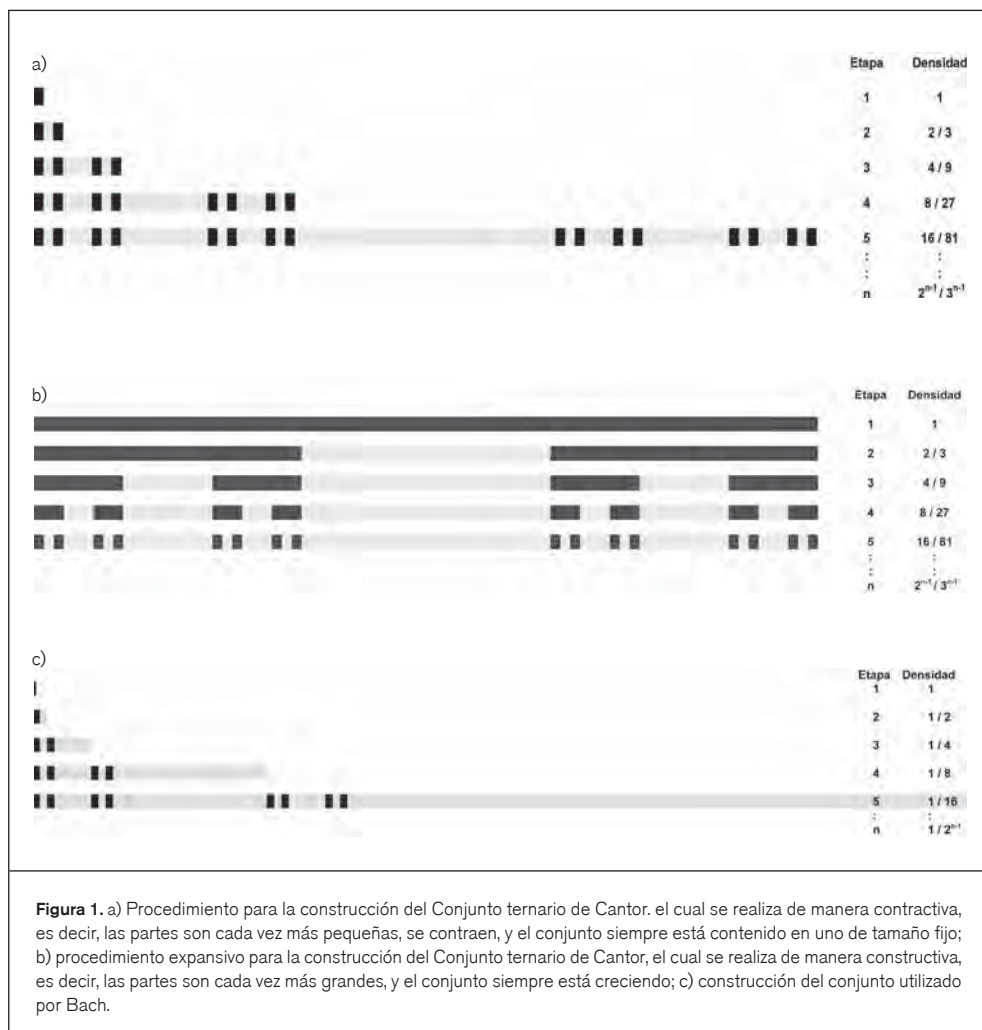
Notemos que cada etapa de la construcción expansiva se "ve" igual a la etapa correspondiente de la construcción contractiva del conjunto ternario de Cantor. La estructura de cada etapa de la construcción expansiva del conjunto ternario de Cantor se puede esquematizar como XYX , donde X representa la estructura de la etapa anterior y Y un espacio del tamaño de X .

Bach y Cantor

Ahora construyamos otro conjunto de Cantor: el que se observa en la estructura del primer *bourrée* de la 3ª Suite para violoncello de Bach. Consideremos la construcción expansiva del conjunto ternario de Cantor modificado la regla de repetición o iteración que será la siguiente: en cada etapa, tomar dos bloques o estructuras obtenidas en la etapa anterior y añadirles un espacio del tamaño del doble de una estructura de la etapa anterior.

Llamaremos al conjunto utilizado por Bach, "conjunto Bach-Cantor". La estructura de cada etapa de la construcción del conjunto Bach-Cantor se puede esquematizar como XXY , donde X representa la estructura de la etapa anterior y Y un espacio del doble del tamaño de X (figura 1.c).

El primer *bourrée* en la Suite No. 3 para violoncello



de Bach es un claro ejemplo de escalamiento estructural. La forma recursiva de su estructura puede verse como el conjunto Bach-Cantor. Examinando la partitura, nos enfocamos en el ritmo y el fraseo de la primera sección del primer *bourrée*. El fraseo musical se refiere a la forma en que ciertas secuencias de notas son asociadas naturalmente entre ellas (figura 2).

Observemos que Bach usó el patrón repetido *XXY* en diferentes escalas, donde cada sección *Y* dura el doble de lo que dura cada sección *X*. La pieza inicia con dos notas de $1/8$ y una nota de $1/4$, luego repite ese patrón, y continúa con una frase que tiene el doble de su longitud, es decir de $4/4$. Este mismo patrón de corto-corto-largo se repite, seguido de una secuencia más larga de $16/4$.

Análogamente, los primeros ocho compases se repiten, dando dos secciones cortas de $64/4$, que son seguidas por una sección más larga de 20 compases, es decir $80/4$; pero Bach escribió la pieza con un símbolo de repetición al final de estos 20 compases, es decir, hay $160/4$ en este bloque, como el doble de $64/4$ es $128/4$, observemos qué pasa después de $128/4$: estos últimos

Figura 2. Análisis del primer bourrée de la suite No. 3 para violoncello de Bach. Las partes marcadas por las llaves corresponden a las repeticiones.

terminan en el doceavo compás de la repetición del segundo bloque, y las dos últimas notas de $1/8$ del dicho compás no son parte de los $128/4$, ya que el bloque inició en anacruza.

Observemos que la estructura del resto del bloque vuel-

ve a ser como la inicial: se tiene dos notas de $1/8$, seguidas de otras dos notas de $1/8$, pero éstas últimas están unidas por una ligadura, así que esas dos notas realmente están pensadas como un tiempo de $1/4$, y se vuelve a repetir este patrón seguido por un bloque de $4/4$.

El anidamiento jerárquico del fraseo *XXY* en el primer *bourrée* produce un patrón igual al de la construcción del conjunto que hemos llamado Bach-Cantor. Notemos que la estructura del primer *bourrée* de la 3ª Suite de Bach se ve como parte de la etapa 6 de la construcción expansiva del conjunto de Bach-Cantor, vista como la etapa 5, seguida por una parte de la etapa 5 (figura 1.b).

Algunos violoncellistas no tocan este *bourrée* con la segunda repetición; sin embargo, al tocarlo con repeticiones claramente se percibe en su ritmo y fraseo la esencia del conjunto de Bach-Cantor. 🎧



Flor de María Aceff Sánchez
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México.

IMÁGENES
Pp. 28-29: Obama, Atlanta, Pp. 30-31: Arte Urbano en la Red.