

## MODELOS MATEMATICOS Y ESTUDIOS LONGITUDINALES DE CRECIMIENTO

Loraine Schlaepfer\*

En esta ponencia se pretende hacer una revisión crítica de los modelos matemáticos de crecimiento, su uso y su desarrollo histórico en el hombre y, además, describir en detalle el modelo de Count, posteriormente utilizado para dar dos ejemplos concretos de aplicaciones de la metodología, que consiste en ajustar modelos matemáticos a series longitudinales de medidas antropométricas, en particular de peso y talla.

### 1. *Estudios de crecimiento y algunas metodologías para su análisis*

Las hipótesis de interés que se plantean en los estudios de crecimiento son de tres tipos generales: las que están basadas en medidas de distancia, de velocidad o de aceleración. En otras palabras usando como ejemplo la estatura, las variables por considerarse serían respectivamente: talla adquirida a una cierta edad, incremento de la talla entre dos edades y cambios en la velocidad de crecimiento en la talla entre dos periodos. Un estudio de corte transversal es suficiente para probar las hipótesis relacionadas con medidas de distancia. Sin embargo, sólo mediante estudios longitudinales, o sea aquéllos donde se mide cada niño en dos o más ocasiones, se pueden estudiar velocidades de crecimiento (3 ocasiones mínimo para aceleración). Tanner (1962) afirma que, para calcular el incremento promedio con la misma precisión o error estándar, se necesita un número por lo menos 20 veces mayor de individuos, medidos en una sola circunstancia, del que se requiere al medir individuos en ocasiones repetidas. Además, para evaluar la variabilidad de la velocidad de crecimiento, por ejemplo para comparar las velocidades de dos o más grupos de niños en un cierto periodo, es imprescindible valerse de estudios longitudinales.

\* División de Nutrición, Instituto Nacional de Nutrición Salvador Zubirán, México.

Ahora bien, ¿qué información adicional, además de velocidad o aceleración en el crecimiento, se puede derivar de toda una serie (más de 3 observaciones) de medidas antropométricas a través del tiempo? Este tipo de estudios tiene aplicaciones muy variadas que incluyen desde tratar de graduar el crecimiento por medio de curvas relativamente sencillas, la justificación biológica de los patrones observados, la comparación de ciertas características de crecimiento en diferentes grupos poblacionales, hasta el establecimiento de normas de crecimiento. El presente artículo se orienta a la metodología que ajusta un modelo matemático a los valores seriados de un individuo y a su aplicación a situaciones reales. En síntesis, el procedimiento es el siguiente: en la ecuación del modelo, aparecen ciertos parámetros, coeficientes o constantes que toman valores característicos para cada niño y proporcionan la información adicional que se está buscando. Por ejemplo, si se aplica un modelo que contenga 3 parámetros  $-a, b$  y  $c-$  a las observaciones seriadas de talla de cada uno de los niños de una muestra de tamaño  $n$ , se obtendrán  $n$  series de parámetros individuales  $a_i, b_i$  y  $c_i$ , de los cuales se podrán calcular los valores promedio y de dispersión del grupo. Suponiendo que el modelo matemático gradúa perfectamente la curva formada por los valores observados, entonces sus parámetros resumen toda la información contenida en las observaciones originales. Esto representa una simplificación radical que permitirá relacionar el patrón de crecimiento, a través de sus parámetros, a los factores de interés de las hipótesis planteadas en el estudio (factores biológicos, nutricionales, socioeconómicos, etcétera).

Son claras las ventajas que se pueden obtener al seguir un niño o grupo de niños durante todo o parte de su desarrollo, desde el punto de vista fisiológico, psicológico o social. Quizás menos evidentes son aquellas que resultan desde el punto de vista morfológico. Una de ellas es que tal sistema permite eliminar las diferencias cronológicas que existen en los patrones de crecimiento de cada individuo. Por ejemplo, supongamos que se ajustó un modelo a los valores para la talla de dos niños que presentan brotes puberales de crecimiento idénticos, sólo que, desfasados en el tiempo. Esto acontece porque el advenimiento de la adolescencia es función de la madurez biológica de un individuo y no de su edad cronológica. Si el modelo es adecuado, algunos parámetros representarán el contorno, la intensidad, etcétera, del pico; o sea representarán todos los aspectos no relacionados con la edad de su aparición y, por tanto, serán similares para los dos niños. Otros,

por el contrario, se relacionarán con el momento inicial de aceleración del crecimiento, con la edad en la cual la velocidad tiene su máximo valor, etcétera; serán entonces, diferentes para los dos niños y caracterizarán su avance o retraso biológico.

En la decisión sobre la selección de un modelo matemático adecuado, la dificultad reside en encontrar una curva que tenga, al mismo tiempo, un buen ajuste y un número reducido de parámetros con interpretación biológica definida. Esto es debido al hecho de que las variables de crecimiento son muy complejas, desde el punto de vista biológico.

La talla, por ejemplo, está constituida por la suma de las longitudes de pierna, de tronco y de cabeza y cada una de estas componentes sigue un patrón de crecimiento propio y distinto al de las demás. Pero también en el caso de variables simples, son varias las hipótesis sobre los mecanismos de su crecimiento, y cada una de estas resulta en un modelo matemático distinto. Así, el crecimiento hipertrófico implica un incremento constante de la masa y el crecimiento hiperplásico implica un incremento proporcional a la masa. La hipótesis más compleja de que el crecimiento es el resultado de un incremento combinado del número de células y de la masa de éstas, da origen a un sinnúmero de ecuaciones matemáticas, para cada dimensión estudiada y para las diferentes etapas biológicas consideradas.

Los expertos en crecimiento llegaron a sus modelos por tres caminos diferentes:

- a) Usando ecuaciones empíricas como instrumento descriptivo, sin pretender racionalizar los parámetros. Como ejemplo, están las rectas o parábolas de (Scammons y Calkins (Scammons 1929) para describir el crecimiento de las dimensiones lineares del feto humano.
- b) Buscando una ecuación empírica que se ajuste adecuadamente a las observaciones y, a partir de ésta, argumentando una ley de crecimiento. Por ejemplo, Robertson (1908) encuentra que los datos de crecimiento, en general, tienen la forma de una curva autocatalítica o logística, y argumenta que todo proceso de crecimiento está controlado por una reacción de autocatálisis química, lo que es una generalización que no está probada.
- c) Procurando desarrollar expresiones racionales para la velocidad de crecimiento. Los investigadores se plantean una hipótesis respecto a los factores biológicos que pueden infe-

rir en el proceso, y ésta los conduce a una ecuación particular. La validez de sus resultados será, de este modo, una función directa de la exactitud de su hipótesis. Weiss y Kavanau (Weiss 1957) desarrollaron una ecuación de 14 parámetros para explicar el crecimiento de polluelos. Aunque cada uno de estos parámetros tiene un significado biológico preciso, son enormes las dificultades analíticas y computacionales asociadas a tal procedimiento.

## 2. *Desarrollo histórico de los modelos de crecimiento*

El modelo que Gompertz desarrolló en 1875 para el análisis de datos de actuario, fue utilizado, posteriormente, por Winsor y Courtis (Winsor 1932, Courtis 1932) para modelar el crecimiento de organismos biológicos, así como el desarrollo mental del niño. Hoy en día, sigue teniendo vasta aplicación, sobre todo para la descripción del crecimiento durante la fase de la pubertad.

A principios del siglo veinte, Robertson propuso la teoría según la cual el proceso de crecimiento obedece a las leyes de una reacción química monomolecular y autocatalítica, con su correspondiente modelo logístico. Aplicó el modelo a los datos de crecimiento de numerosos animales y plantas y, también, a diferentes ciclos del crecimiento humano, obteniendo ajustes más o menos satisfactorios, dependiendo del ciclo estudiado. Al igual que la curva de Gompertz, la logística ha sido utilizada abundantemente por investigadores recientes, como Pearl y Reed (Pearl 1925), Tanner (1976) y Marubini (1971), entre otros, para la descripción del crecimiento en la edad adolescente principalmente.

En 1947, Janss y Bayley (Janss 1937) ajustaron la ecuación exponencial

$$y = c + d \cdot \text{edad} - \exp(a + b \cdot \text{edad})$$

a las series de peso y talla de un niño y una niña, respectivamente, desde el nacimiento hasta los seis años de edad, con buenos resultados.

En 1943, Count (1943) describe el proceso de crecimiento desde el momento de la concepción hasta la edad adulta, por medio de tres logísticas asimétricas. Al aplicar su modelo a los promedios de estatura de niños chinos desde el nacimiento hasta

el estado adulto, Count simplifica su primera logística y la reduce a una ecuación logarítmica sencilla:

$$y = a + b.\text{edad} + c.\log(\text{edad})$$

Es esta última ecuación la que se conoce, en la literatura auxológica moderna, como el modelo de Count, que han utilizado numerosos investigadores para describir la fase de crecimiento preadolescentes. Entre ellos: E. Mata (1978) en su estudio de los niños de Sta. María Cauqué, Tanner (1956), Israelsohn (1960) y Wingerd (1970).

Deming (1957) utilizó el concepto de "Ciclos de Crecimiento", que Courtis (1932) había definido como "un periodo de maduración específica, durante el cual los elementos y las fuerzas que actúan sobre el proceso de crecimiento tienen un valor constante, dentro de límites razonables"; identificó, empíricamente, dos ciclos en los datos para la talla de una muestra de niños, participantes en el estudio longitudinal del Children Research Council: niñez (0-8 años) y adolescencia; además ajustó el modelo de Jeness-Bayley para describir al primer ciclo y el de Gompertz para el segundo.

Bock (1973) sugiere que Deming no resuelve satisfactoriamente el problema de la unión de las dos curvas matemáticas, considerando que el crecimiento es un proceso continuo. Bock mismo, para describir el crecimiento de la muestra de niños del estudio longitudinal de Fels (de la edad de un año a la edad adulta) propone, en 1973, un modelo constituido por la suma de dos logísticas simétricas y designa a la primera componente como prepuberal, y a la segunda como puberal. Pretende que su modelo tome en cuenta, por un lado, el largo periodo de crecimiento lineal en el niño (por medio de la simultánea disminución de la primera componente y del aumento de la segunda) y, por otro, el carácter asimétrico del brote puberal (por medio de la superposición de la segunda logística sobre el brazo exponencial decreciente de la primera).

El Lozy (1978), sin embargo, critica el modelo de Bock en una serie de aspectos, entre los cuales destacan los siguientes: Bock no hace esfuerzos para probar su hipótesis de que las dos componentes matemáticas representan, en realidad, dos etapas biológicas distintas. Además, si bien el modelo se ajusta bastante bien a la curva de distancias, su primera derivada no lo hace con las velocidades de crecimiento. Finalmente, El Lozy niega la validez de la interpre-

tación de Bock para algunos de los parámetros. Bock mismo, posteriormente (1976), concuerda con estas críticas y desarrolla otro modelo, armado por la suma de tres logísticas, mejorándolo de manera definitiva, a costa de un aumento en el número de parámetros, de 6 a 9. Cabe notar que, a medida que el número de parámetros aumenta, la precisión con la cual cada uno es estimado disminuye, la correlación entre los parámetros aumenta y su interpretación se vuelve más difícil.

Al respecto, Joossens (1975) que utiliza polinomios de alto grado para describir el cambio de cualquier variable con el tiempo (talla, presión arterial, niveles sanguíneos de colesterol, etcétera) pretende que no importa el obtener un número elevado de parámetros, si el interés no reside en su interpretación biológica, sino en describir las observaciones de la manera más exacta posible. Según Goldstein (1979) cualquier curva puede ser ajustada por polinomios si se agregan los términos necesarios. Los polinomios de bajo grado tienen coeficientes cuya interpretación es inmediata y el cálculo de los coeficientes polinomiales es sencillo. El problema de la alta correlación entre los coeficientes polinomiales se resuelve, ya sea por medio de la utilización de polinomios ortogonales, a expensas de una menor interpretabilidad de los coeficientes, o bien por medio de la utilización de un modelo multivariado que resulta en pruebas más poderosas, errores estándar menores e intervalos de confianza más estrechos, como lo demuestran Rao (1965), Grizzle y Allen (1969), y Box (1950).

Preece y Baines (Preece 1978) proponen una familia de tres modelos matemáticos aparentados a la misma ecuación diferencial de origen:  $dh/dt = s(t) \cdot (h_1 - h)$ , donde  $h$  = talla,  $t$  = edad,  $h_1$  = talla adulta y  $s(t)$  = una función de la edad. Su modelo I, en particular, resultó ser robusto, exacto, contiene sólo 5 parámetros y se compara favorablemente con la doble-logística de Bock, al aplicarlo a las observaciones de un grupo de niños, desde los 2 años a la edad adulta. Sin embargo, persisten en sus resultados, algunas fluctuaciones sistemáticas y la interpretación biológica de los parámetros sigue presentando algunas dificultades.

Finalmente, es preciso comentar el nuevo enfoque dado al estudio longitudinal del crecimiento por el grupo de Stuetzle (1980) de Zürich, Suiza, que denominan su técnica *shape-invariant modelling*. Se postulan, inicialmente, dos tipos de funciones que van a representar, respectivamente, el crecimiento prepuberal y puberal. Los autores han utilizado varias funciones, pero trabajaron principalmente con splines cúbicos, y postulan que las dos

componentes interactúan (*switch-off model*) en vez de ser meramente aditivas. Representan matemáticamente esta interacción por medio de una función phi que está multiplicada a la primera componente y acoplada a la segunda, como se aprecia en la siguiente ecuación:

$$y = s_{1,t}(a_1, b_1 \dots) \cdot (a_2, b_2 \dots) + s_{2,t}(a_2, b_2 \dots);$$

en donde  $y$  es la variable observada,  $s_{1,t}$  y  $s_{2,t}$  son funciones del tiempo  $t$ ;  $a_1, b_1 \dots$  son los coeficientes de la primera y  $a_2, b_2 \dots$  los de la segunda componente. Ajustan el modelo iterativamente, por medio del método de mínimos cuadrados no lineales. Este método estima, de esta manera, no sólo los parámetros, sino también la estructura misma del modelo. Para su aplicación requiere de una muestra bastante grande de niños así como de usos de la computadora un tanto sofisticados. Los autores lo han aplicado exitosamente al crecimiento de niños sanos, y también al de niños que presentaban desórdenes de crecimiento; han podido identificar inclusive fenómenos fisiológicos, como el controvertido brote de crecimiento prepuberal. Su método es aplicable a una gran cantidad de variables y no sólo al peso y a la talla. Sin embargo, los coeficientes matemáticos no tienen una equivalencia directa con los parámetros biológicos.

### 3. Dos ejemplos de aplicaciones de modelos de crecimiento

En los dos ejemplos que se describen, se considera el crecimiento en talla y peso de niños durante el periodo de 1 a 10 años de edad. A raíz de la discusión anterior y de ciertas consideraciones prácticas que se exponen a continuación, se seleccionó el modelo de Count como instrumento analítico. En efecto, los modelos polinomiales son inadecuados para las edades tempranas (Marubini 1978), y el propuesto por Jenss y Bayley, es un modelo no lineal, que requiere de procedimientos de análisis no incluidos en el paquete estadístico disponible, a saber, el SPSS Versión 8.0 de la UNAM (Nie 1975). El modelo de Count, según su propia experiencia del autor y también de C. Berkey (1982), no gradúa bien ni la talla ni el peso en edades inferiores al año, pero su actuación es buena después de esa edad. Se escogió el límite superior de 10 años, por querer tener un margen de seguridad que garantizara que el brote puberal de crecimiento no hubiera comenzado aún, lo que implicaría el uso de un modelo diferente.

El modelo de Count tiene la siguiente forma:

$$y = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot \log(t) + e;$$

en donde  $y$  es la variable observada,  $t$  es la edad en días,  $b_0$  el intercepto de la curva,  $b_1$  representa la velocidad linear prepube-ral de crecimiento,  $b_2$  representa la componente principal de la velocidad rápida durante la niñez temprana y  $e$  es el error aleatorio. Para el ajuste del modelo, se utilizó el método de regresión lineal de mínimos cuadrados.

#### *A. Comparación de dos submuestras de un mismo estudio*

En la comunidad de Tezonteopan, Puebla, se ha estado llevando a cabo un estudio longitudinal de nutrición y desarrollo desde 1968, cuya metodología detallada está descrita en el libro *Nutrición y Desarrollo Infantil*, por sus investigadores principales A. Chávez y C. Martínez (A. Chávez 1978). Resumiendo algunos datos de tal investigación, Tezonteopan es una comunidad que consistía, al inicio del estudio, de 1495 habitantes y estaba dedicada, principalmente, al cultivo de maíz, frijol, cacahuete y jitomate, en tierras de temporal. Treinta por ciento de los agricultores eran dueños de sus tierras y los demás poseían ejidos, rentaban la tierra o bien trabajaban como medieros o jornaleros. La gente era humilde y tenía una dieta pobre y monótona: el estudio de una muestra de 42 familias demostró que 63% de las calorías se derivaban de la ingesta de tortillas, 11% de la de frijol y 11% de la de azúcar. La ingesta promedio por persona por día, era de 1 981 KCal y 55.6 gr de proteína de escasa calidad. Las características de las viviendas eran igualmente modestas: 78.3% de las casas tenían piso de tierra, ninguna poseía drenaje ni fosas sépticas y en aquel entonces 63% no tenían agua intradomiciliaria. Tezonteopan era, además, una comunidad endógama, aislada y no presentaba fenómenos de migración. El estudio se llevó a cabo para analizar la interrelación de los factores ambientales del niño, en particular su alimentación y de una serie de fenómenos ligados al comportamiento infantil, materno y familiar. Se utilizó el modelo de intervención mediante el cual se observa el comportamiento de la variable dependiente, desarrollo, cuando se modifica la variable independiente, nutrición, manteniendo controladas otras variables que pudieran inferir, como sería diferencias en el estado socioeconómico, estado de salud, etcétera.

Para el grupo testigo, se seleccionaron todas las mujeres del pueblo que se embarazaron en 1968 y que cumplían con ciertos requisitos socioeconómicos, de salud, de talla y de paridad. Después del parto, se hizo una segunda selección quedando dentro de la muestra sólo niños normales y sanos con sus madres. La muestra de intervención se seleccionó un año después, siguiendo los mismos criterios. A estas mamás se les impartió un suplemento diario de 50 gr de leche en polvo, más minerales y vitaminas a partir del día 45 y por toda la duración del embarazo, así como durante la lactancia, hasta el momento en que el incremento del peso del niño dejó de ser satisfactorio (aproximadamente 3 meses), cuando se comenzó a dar suplementos al niño. Este recibió en un principio, fórmulas lácteas y purés *ad libitum*; después se cambió el suplemento a emparedados de diversos tipos. La suplementación se proporciona durante todo el periodo de crecimiento. La ingesta de cada niño se cuantificó, repetidamente, durante todo el tiempo en el que se llevó a cabo la investigación.

A continuación se compararán los patrones de crecimiento en peso y talla de los niños de estos dos grupos.

La muestra estudiada comprende 30 niños en total, de los cuales 16 forman parte del grupo testigo y 14 del grupo intervenido (cuadro 1). Las medidas antropométricas se tomaron con una frecuencia que variaba en función de la edad del niño. Así, se midieron los niños a los 0, 3, 14 y 30 días de nacidos; luego mensualmente durante los primeros tres años de vida; bimestralmente durante el cuarto año; trimestralmente durante el quinto y posteriormente cada 6 meses. Las fechas reales de las mediciones fluctuaron alrededor de la fecha objetivo, con una tolerancia también

CUADRO 1

DISTRIBUCION DE LOS NIÑOS DEL ESTUDIO DE  
TEZONTEOPAN POR GRUPO Y SEXO

	<i>Sexo masculino</i>	<i>Sexo femenino</i>	<i>Total</i>
Grupo testigo	8	8	16
Grupo intervenido	6	8	14
Total	14	16	30

en función de la edad, que fue tan pequeña como de 3 días, en un principio y, al final, no mayor que 15 días. El grupo testigo tuvo, en general, un número ligeramente menor de observaciones, como se puede apreciar en el cuadro 2.

Para investigar si hay diferencias en el patrón de crecimiento de niños y niñas, dentro de cada grupo, se supuso un modelo de efectos fijos y un diseño completamente aleatorizado de los factores grupo y sexo. Los resultados del análisis de varianza para los coeficientes  $b_1$  y  $b_2$  del modelo, demostraron que: a) no hay interacción entre los factores grupo y sexo; b) el factor sexo no es significativo, y c) el factor grupo, al contrario, lo es, lo que permitió considerar a los dos sexos conjuntamente dentro de cada grupo.

En las figuras 1 y 2, se comparan las curvas de los valores promedio para el peso y la talla, en relación a la edad de los dos grupos. Puede observarse cómo, a partir del año y medio de vida (548 días), existen diferencias entre los dos grupos, que se acen-

## CUADRO 2

### DISTRIBUCION DE LOS VALORES FALTANTES EN LOS 2 GRUPOS; TESTIGO E INTERVENIDO, DEL ESTUDIO DE TEZONTEOPAN NUMERO MAXIMO POSIBLE DE OBSERVACIONES EN EL INTERVALO 1-10 AÑOS=60

<i>No. de observaciones faltantes</i>	<i>Grupo testigo</i>	<i>Grupo intervenido</i>
0	6	0
1	4	1
2	2	1
3	3	1
4	0	4
5	1	0
6	0	4
7	0	1
8	0	0
9	0	1
10	0	1
Total niños	16	14

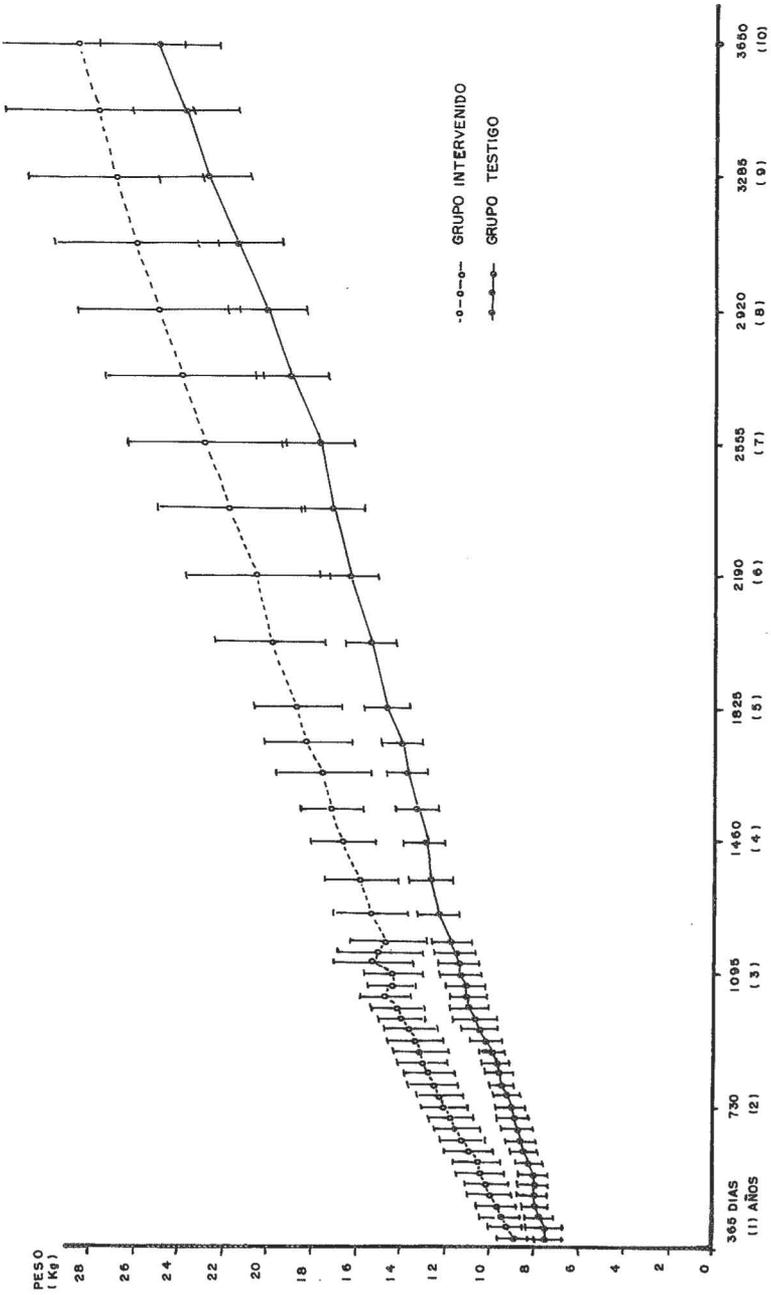


FIG. 1 VALORES PROMEDIO ( $\pm$  1 desviación estándar) PARA EL PESO, DE LOS GRUPOS TESTIGO (n=16) E INTERVENIDO (n=14) DE TEZONTEOPAN, POR EDAD, AMBOS SEXOS.

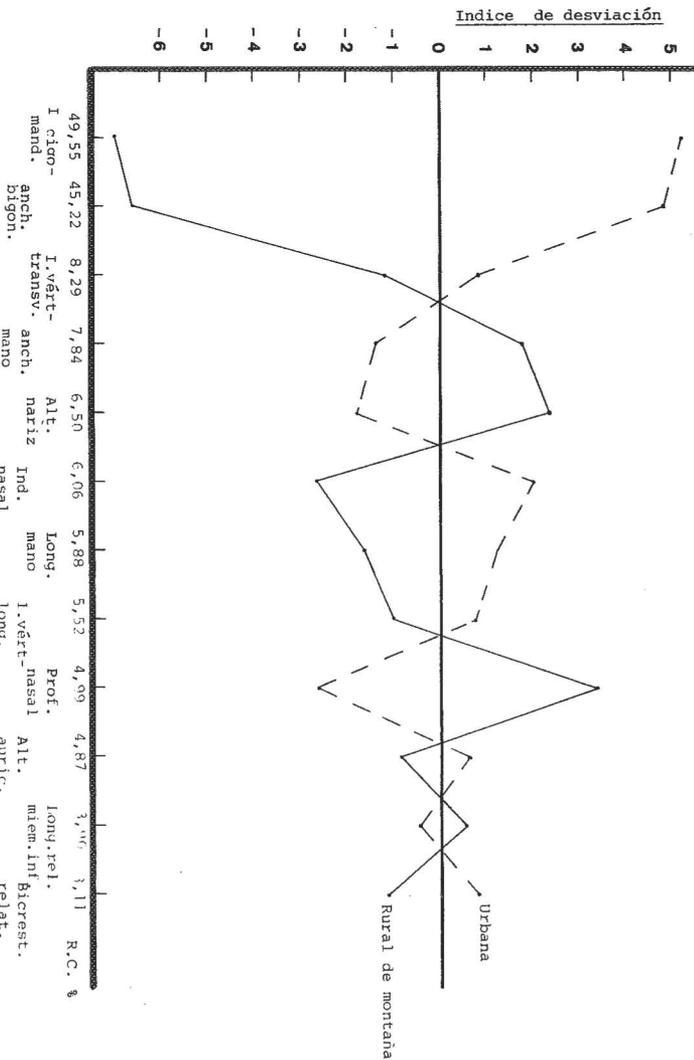


Figura nº2. - Diagrama de la relación de correlación y los índices de desviación de las niñas rurales de montaña (—) y las niñas urbanas (- - -) de Zaitos.

túan con el tiempo y luego decrecen para llegar a ya no ser significativas alrededor de los 6 años de edad (2 190 días). Los valores para el grupo intervenido, son en todo momento más altos que los del grupo testigo. Nótese también cómo la dispersión de los valores aumenta con la edad.

*Ajuste del modelo*

Por medio de la observación de las gráficas individuales de talla-edad y peso-edad y, conjuntamente, del registro de los residuos cuyo valor absoluto fuera mayor de tres veces el error estándar de los mismos, se identificaron siete observaciones aberrantes, para el caso de la talla y dos para el del peso, que se omitieron de los cálculos de regresión.

Las suposiciones sobre las cuales se fundamenta el modelo de regresión requieren que los residuos sean una variable aleatoria de distribución normal, con media 0 y varianza igual, lo que se verificó debidamente. Otra hipótesis es la de la no-correlación entre los residuos. De hecho, se encontró que existe una correlación positiva entre éstos, pero que se vuelve pequeña entre los correspondientes a observaciones espaciadas por un mínimo de 4 meses ( $r = .17$ ).

El cuadro 3 muestra la bondad del ajuste del modelo para el peso y la talla y para cada grupo. El cuadrado medio residual refleja la magnitud de la desviación de las observaciones de la curva

**CUADRO 3**

**BONDAD DEL AJUSTE DEL MODELO DE COUNT**

$$y = b_0 + b_1 \cdot \text{edad} + b_2 \cdot \log(\text{edad}) + e$$

(edad: 1-10 años)

**Tezonteopan**

		<i>Cuadrado medio residual</i>	$R^2$
TALLA	Grupo testigo	1.127	.995
	Grupo intervenido	1.066	.996
PESO	Grupo testigo	.262	.989
	Grupo intervenido	.336	.990

de regresión y el coeficiente de determinación,  $R^2$ , da la proporción de la variación explicada por el modelo, en relación a la variación total de las observaciones. Como se puede ver, en el caso de la talla, 99.5%, y en el del peso, 98.9%, la variación total se explica por el modelo seleccionado.

Las figuras 3 a 6 muestran, como ejemplo, las medidas reales y las curvas ajustadas a ellas, del niño 21, que se seleccionó por tener un buen ajuste para la talla, y del niño 30, escogido por tener el peor ajuste, también en el caso de la talla.

Los cuadros 4 y 5 muestran los valores promedio, mínimo y máximo así como los errores estándar de los parámetros, para el peso y la talla respectivamente, y para cada grupo. Se hicieron pruebas de t (de Student) para probar las hipótesis:

$$H_0 : b_1 . \text{testigo} = b_1 . \text{intervenido} \text{ y } H_0 : b_2 . \text{testigo} = b_2 . \text{intervenido}.$$

Se encontraron diferencias altamente significativas ( $p < .01$ ) para ambos parámetros, tanto para el peso como para la talla. Puesto

#### CUADRO 4

##### VALORES PROMEDIO, MÍNIMO Y MÁXIMO, Y ERRORES ESTÁNDAR DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DE COUNT AJUSTADO A LA TALLA

$$y = b_0 + b_1 . \text{edad} + b_2 . \log (\text{edad}) + e$$

(edad: 1–10 años,  $n = 30$ )

Tezonteopan

	$\bar{X}$	$s/\sqrt{n}$	Mínimo	Máximo
<i>Grupo testigo</i>				
$b_0$	- 0.738	3.884	-35.153	37.124
$b_1$	0.009	0.000*	0.006	0.012
$b_2$	25.484	1.429	11.880	38.038
<i>Grupo intervenido</i>				
$b_0$	-39.258	4.328	-65.169	- 0.404
$b_1$	0.003	0.001	0.000	0.007
$b_2$	42.910	1.653	27.770	51.275

\* SPSS da únicamente 3 decimales.

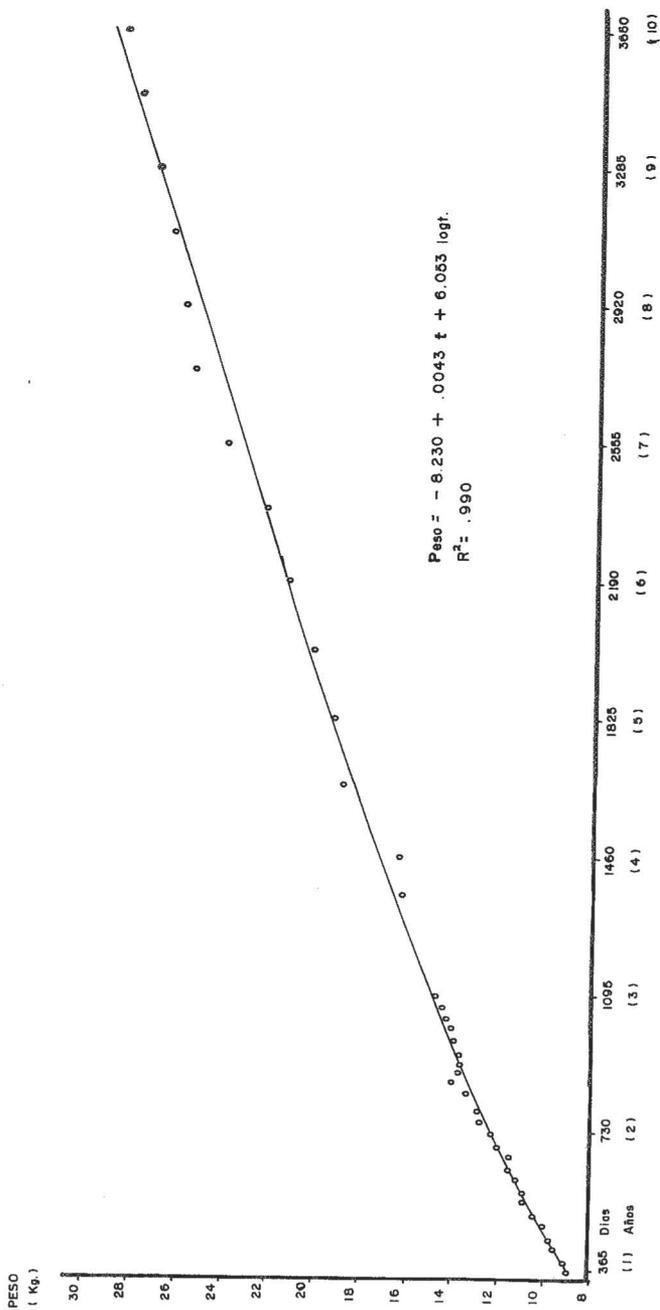


Fig. 3 Observaciones de peso para el niño 21 y curva ajustada a los valores calculados por medio de la ecuación de regresión.

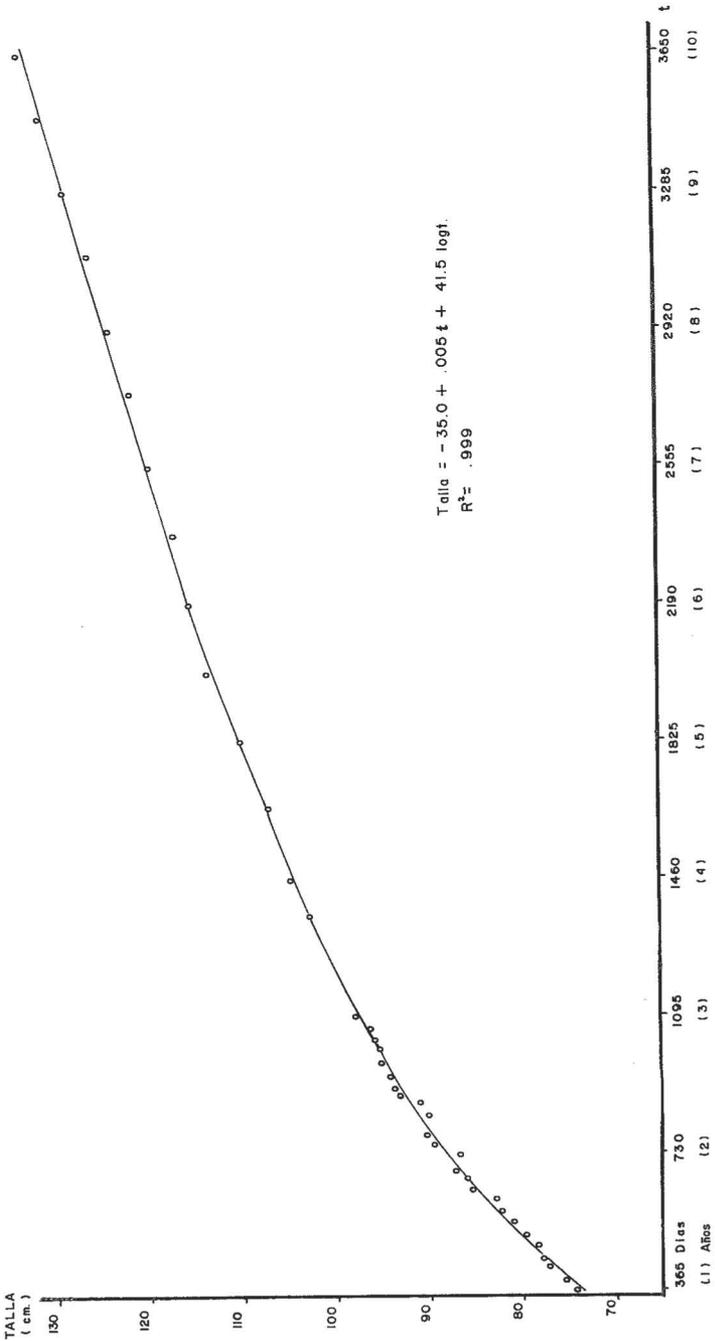


Fig. 4 Observaciones de talla para el niño 21 y curva ajustada a los valores calculados por medio de la ecuación de regresión.

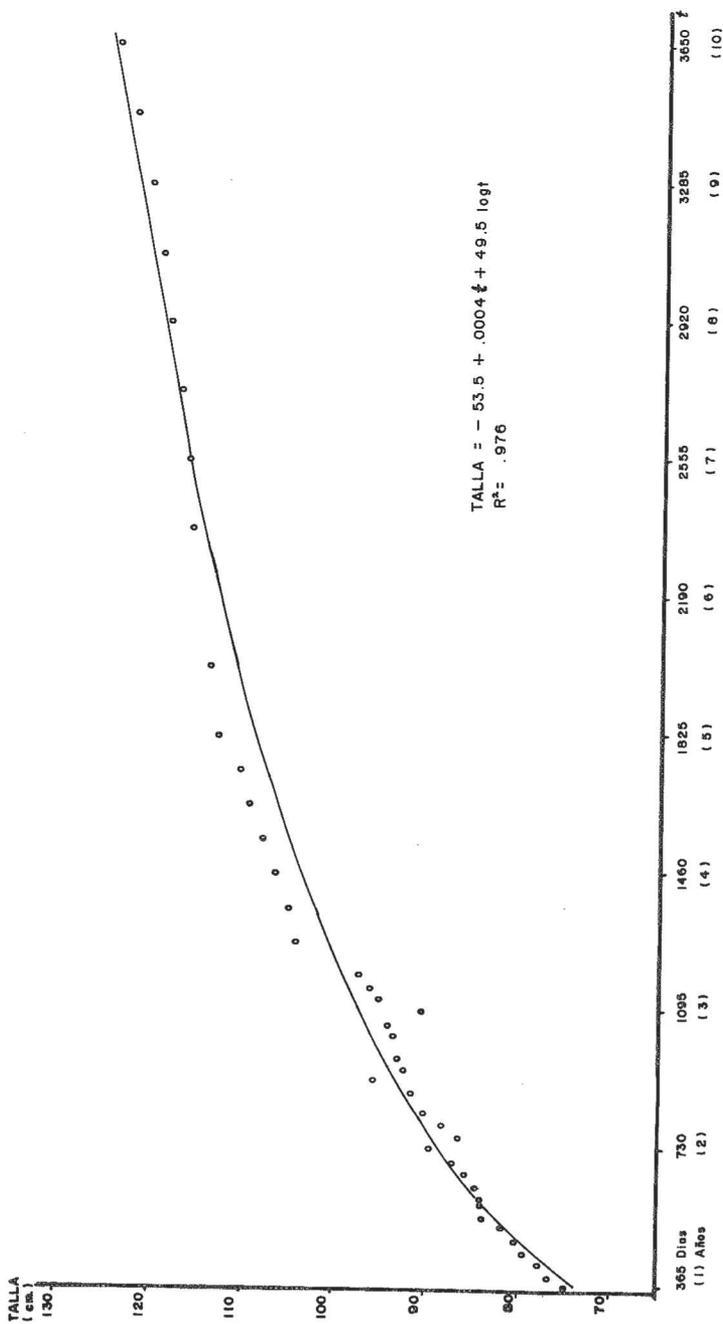


Fig. 5 Observaciones de talla para el niño 30 y curva ajustada a valores calculados por medio de la ecuación de regresión

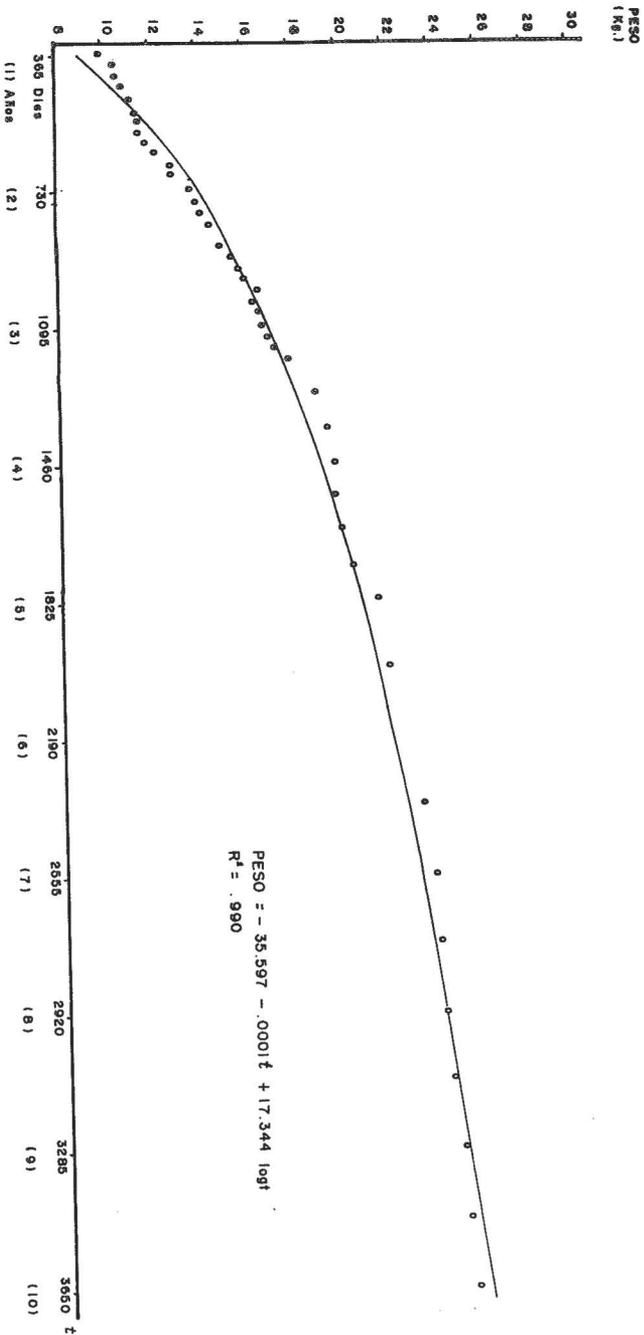


Fig. 6 Observaciones de Peso para el niño 30 y curva ajustada a los valores calculados por medio de la ecuación de regresión

CUADRO 5

VALORES PROMEDIO, MINIMO Y MAXIMO, Y ERRORES ESTANDAR DE LOS PARAMETROS DEL MODELO DE COUNT AJUSTADO AL PESO

$$y = b_0 + b_1 \cdot \text{edad} + b_2 \cdot \log(\text{edad}) + e$$

(edad: 1–10 años, n = 30)  
Tezonteopan

	$\bar{X}$	$s/\sqrt{n}$	Mínimo	Máximo
<b>Grupo testigo</b>				
b <sub>0</sub>	6.854	1.610	– 5.125	20.064
b <sub>1</sub>	0.005	0.000*	0.003	0.008
b <sub>2</sub>	– 0.537	0.625	– 5.252	4.363
<b>Grupo intervenido</b>				
b <sub>0</sub>	– 3.887	3.332	– 35.597	16.205
b <sub>1</sub>	0.005	0.001	– 0.001	0.011
b <sub>2</sub>	4.317	1.332	– 3.420	17.345

\* SPSS da únicamente 3 decimales.

que existe una alta correlación entre los b<sub>i</sub> (r de Pearson > .9), lo correcto hubiera sido aplicar un análisis multivariado de varianza para probar la hipótesis:

$$H_0 : \{b_1, b_2\}' \text{ testigo} = \{b_1, b_2\}' \text{ intervenido.}$$

Sin embargo, no existe un procedimiento para un análisis de varianza multivariada en la versión utilizada del SPSS.

En conclusión, se ha podido demostrar que el grupo intervenido tiene un patrón de crecimiento mejor que el del grupo testigo, lo cual, considerando el diseño de la investigación, se puede atribuir a la mejor alimentación del primero.

*B. Comparación de la muestra de Tezonteopan con grupos de otros estudios*

Como ejemplo, se comparan los patrones de crecimiento en talla y peso de 1 a 10 años de edad, del grupo testigo de Tezonteopan

como representativos de niños rurales, pobres y que sufren de desnutrición crónica, y de niños de la clase media de la ciudad de México, analizados por R. Ramos-Galván (1975) y J. Faulhaber (1976). El estudio de Ramos Galván es de carácter semilongitudinal, de 5533 niños, sanos, normales, de los cuales 302 fueron seguidos longitudinalmente por lapsos de 1 a 18 años, hasta 1970. La doctora Faulhaber comenzó su estudio en 1963 y siguió a 262 niños hasta los 13 años de edad. De los dos estudios, se tienen como datos los promedios grupales para el peso y la talla, por edad y por sexo.

Con el objeto de verificar si existen diferencias reales en el crecimiento entre niños y niñas en el periodo considerado, se realizó un análisis de covarianza, aplicando, en un primer paso, el modelo completo:

$$y = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot \log(t) + b_3 \cdot \text{sexo} + b_4 \cdot t \cdot \text{sexo} + b_5 \cdot \log(t) \cdot \text{sexo} + e$$

en donde  $y$  = variable observada,  $t$  = edad,  $b_0 \dots b_5$  = coeficientes de regresión del modelo y  $e$  = error. Para las dos variables, peso y talla, y para ambos estudios, de Ramos Galván y de Faulhaber, no se pudo rechazar la hipótesis  $H_0 : b_4 = b_5 = 0$ , por lo que se concluyó que no hay interacción entre el sexo y la edad o su logaritmo y se adoptó, entonces, el modelo simplificado:

$$y = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot \log(t) + b_3 \cdot \text{sexo} + e$$

para probar la hipótesis  $H_0 : b_3 = 0$ . En todos los casos se encontró que el sexo era significativo. Según Tanner (1962):

- a) al nacer, el niño es ligeramente más grande que la niña, de un 1-3% en estatura y de un 4% en peso, lo que se comprobó con los datos de Ramos-Galván (los de Faulhaber comienzan al mes de edad), en los cuales las diferencias promedio correspondientes son de 3.1 y 4.6%. En Tezonteopan, los valores para el grupo testigo son de 2.5 y 6.8%;
- b) durante el primer año de vida, los hombres crecen ligeramente más rápido que las mujeres. En el estudio de Ramos Galván, la diferencia en el caso de la velocidad de crecimiento de la talla es despreciable y en el del peso, asciende a 255 gr/año. En Tezonteopan, son iguales a 2.3 cm/año y 845 gr/año.

- c) En el periodo de 1 a 9 años, las velocidades de crecimiento de niños y niñas son tan similares que los datos existentes no permiten afirmar que las unas son mayores que las otras, lo que se comprobó, una vez más en los datos de Ramos Galván y también en los de Faulhaber. En Tezonteopan, los valores tienen un comportamiento algo más errático, lo que se explica por el número muy pequeño de niños comparados. Esto nos lleva a concluir que las diferencias de crecimiento prepuberal entre sexos, encontrada por Ramos Galván y Faulhaber, se concentran probablemente en el primer año de vida (y son originadas posiblemente desde las fases uterinas). En Tezonteopan, no se encontraron diferencias de crecimiento entre los sexos, pero lo que se comparó en ese caso, fueron los coeficientes  $b_1$  y  $b_2$  del modelo ajustado a partir del año de edad, lo que hace compatible este resultado con los de los otros estudios. De esto, se decidió, para Tezonteopan, analizar a niños y niñas agrupados y para los estudios de Ramos Galván y de Faulhaber, utilizar los valores de las niñas, que siendo algo menor, permitirán una comparación más conservadora entre los niños ricos de la ciudad y los pobres del campo.

El siguiente problema es que, por un lado, se tienen datos individuales, mientras que por el otro se tienen valores grupales promedio. Varios autores han estudiado la relación entre las curvas de crecimiento individuales y la del promedio del grupo. Ya en 1937, Shuttelworth (1937), demostró gráficamente que durante la adolescencia la curva ajustada a los valores promedio de un grupo caracteriza muy pobremente a las velocidades de crecimiento promedio de éste, puesto que existe una gran variabilidad interindividual del brote puberal, lo que se traduce por un desfaseamiento en el tiempo de los puntos de máxima velocidad, con una resultante curva promedio muy allanada. Para describir el crecimiento de un grupo, se puede ajustar el modelo individualmente y calcular los promedios de los parámetros que caracterizarán la llamada curva de los parámetros-promedio. Merrel (1931) demostró matemáticamente que la curva ajustada a los valores promedio de un grupo se puede expresar como la suma de la ecuación de la curva de los parámetros-promedio, y de una serie, cuyo primer término está formado por las derivadas parciales de segundo orden de la ecuación original, con respecto a los coeficientes  $b_j$ , cuyos otros términos están formados por las derivadas parciales de órde-

nes superiores. Afortunadamente, en el caso del modelo de Count las derivadas parciales de segundo orden en adelante son iguales a cero, por lo que la curva promedio coincide con la de los parámetros-promedio.

Esto no es así, por ejemplo, para el caso del modelo de Jenss. De esta manera es válido el procedimiento seguido en este análisis, consistente en comparar la curva de parámetros-promedio del estudio de Tezonteopan con las curvas promedio de los otros dos estudios.

### *Resultados.*

Las figuras 7 y 8 describen el comportamiento de los promedios para el peso y la talla, respectivamente, a medida que aumenta la edad, para los tres grupos. Las figuras 9 y 10 muestran las curvas ajustadas matemáticamente a los pesos y tallas respectivamente. En cada uno de los grupos en los cuadros 6 y 7 se presentan los valores de los parámetros  $b_0$ ,  $b_1$ , y  $b_2$  para cada grupo y para la

## CUADRO 6

### VALORES PROMEDIO $\pm$ ERROR ESTANDAR, DE LOS PARAMETROS DEL MODELO DE COUNT AJUSTADO A LA TALLA, DE LOS NIÑOS DE TEZONTEOPAN, DE RAMOS GALVAN Y DE FAULHABER

$$y = b_0 + b_1 \cdot \text{edad} + b_2 \cdot \log(\text{edad}) + e$$

	$b_0$	$b_1$	$b_2$
Tezonteopan (grupo testigo, ambos sexos)	- 0.7 $\pm$ 3.9	.009 $\pm$ .000*	25.5 $\pm$ 1.4
Ramos Galván (sexo femenino)	7.8	.011	24.4
Faulhaber (sexo femenino)	10.3	.012	22.5

\* SPSS da únicamente 3 decimales.

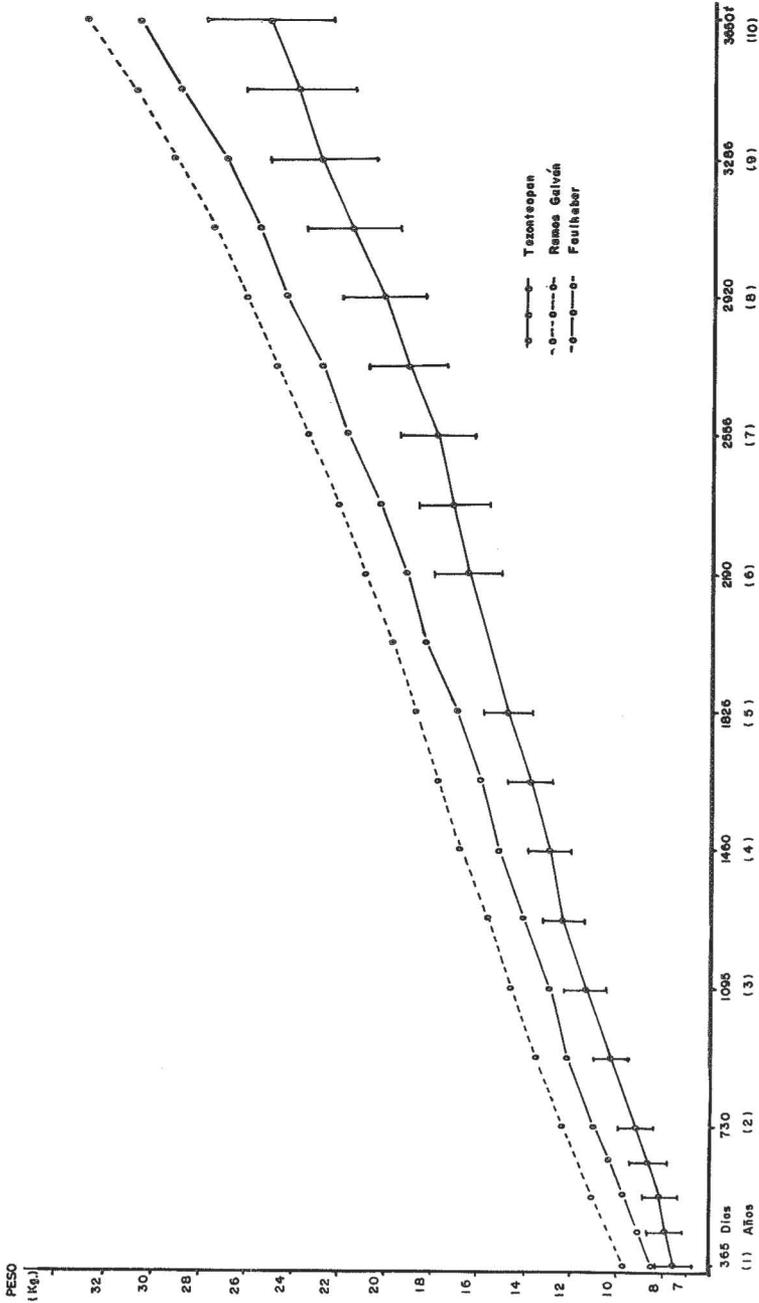


Fig. 7 VALORES PROMEDIO PARA EL PESO DE LOS GRUPOS DE RAMOS GALVAN (Q), FAULHABER (Q) Y DE TEZONTEOPAN (grupo festivo; Q y  $\sigma^2$ ;  $\pm$  | Desviación estándar), POR EDAD.

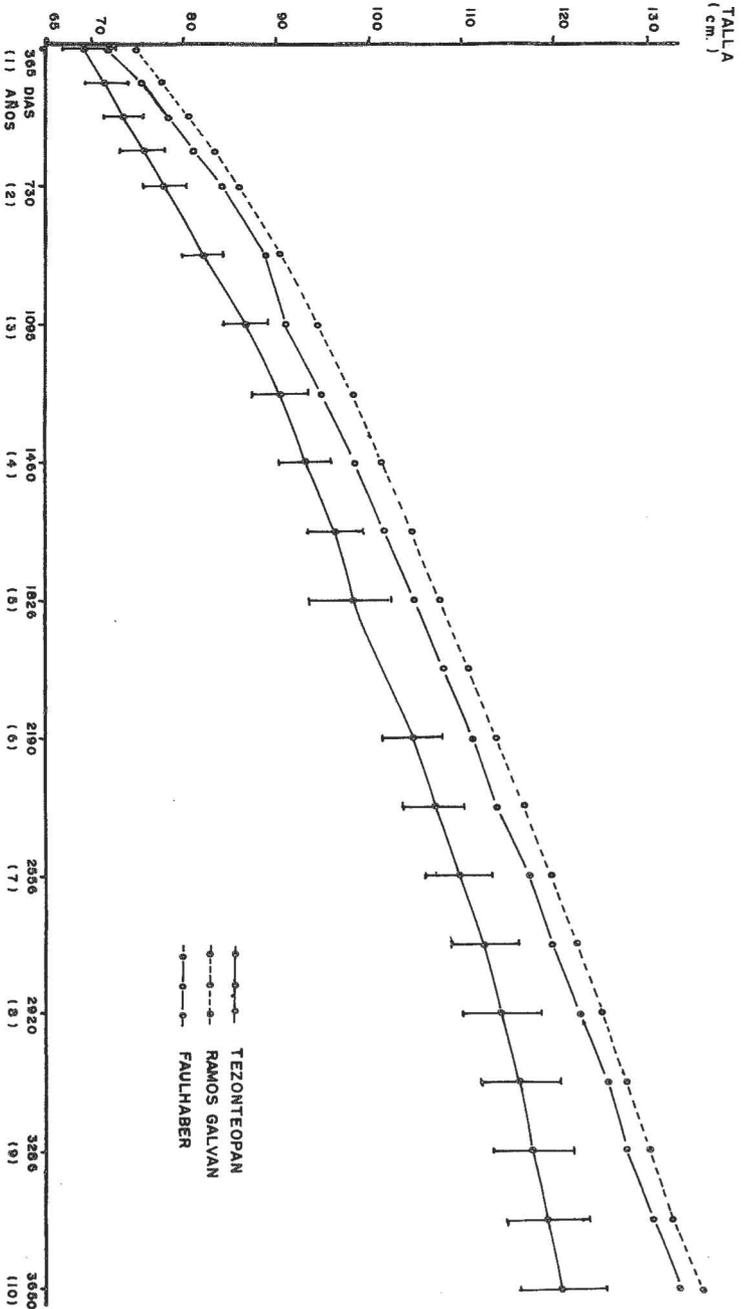


FIG. 8 VALORES PROMEDIO PARA LA TALLA DE LOS GRUPOS DE RAMOS GALVAN (q), FAULHABER (q) Y DE TEZONTEOPAN (GRUPO TESTIGO: q y d; ± DESVIACION ESTANDAR), POR EDAD

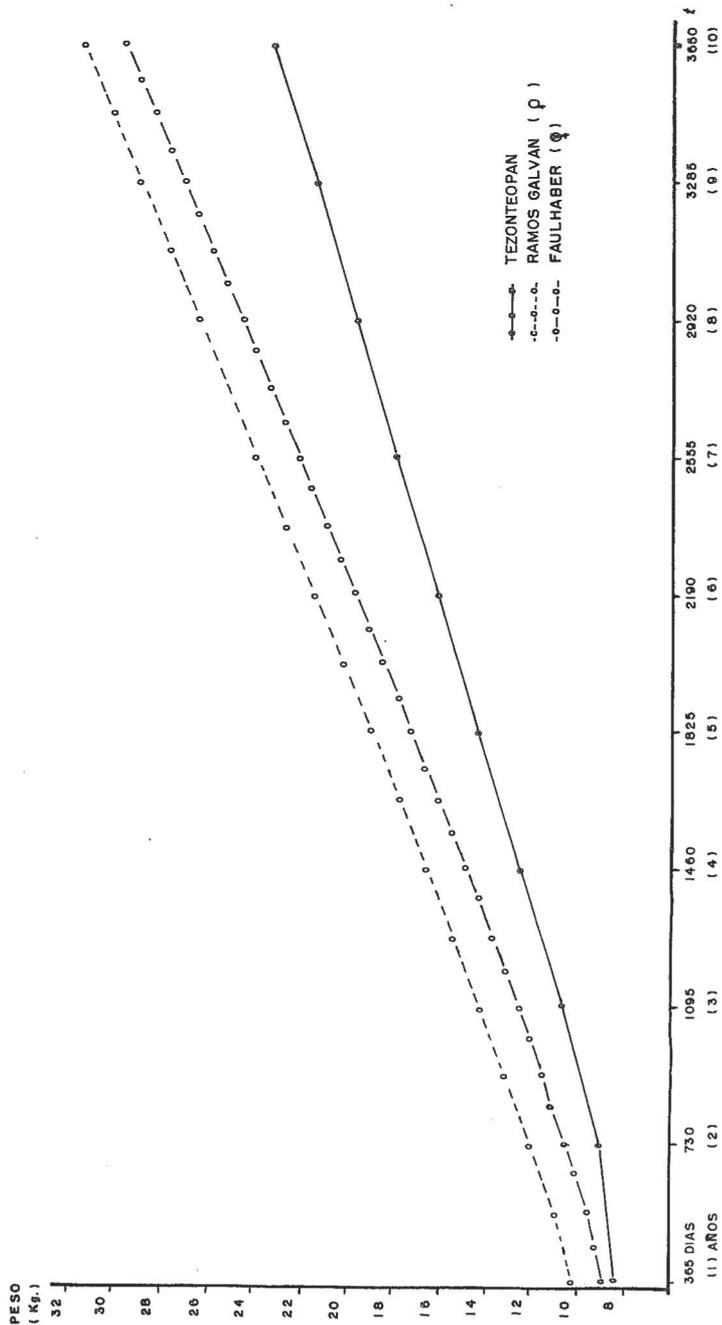


FIG. 9 CURVAS AJUSTADAS AL PESO

TEZONTEOPAN ( grupo festigo:  $\sigma^2, \hat{Q}$  ) :  $y = 6.854 + .005 t - 0.537 \log t$ .

RAMOS GALVAN (  $\hat{Q}$  ) :  $y = 14.979 + .007 t - 2.899 \log t$ .

FAULHABER (  $\hat{Q}$  ) :  $y = 15.001 + .007 t - 3.450 \log t$ .

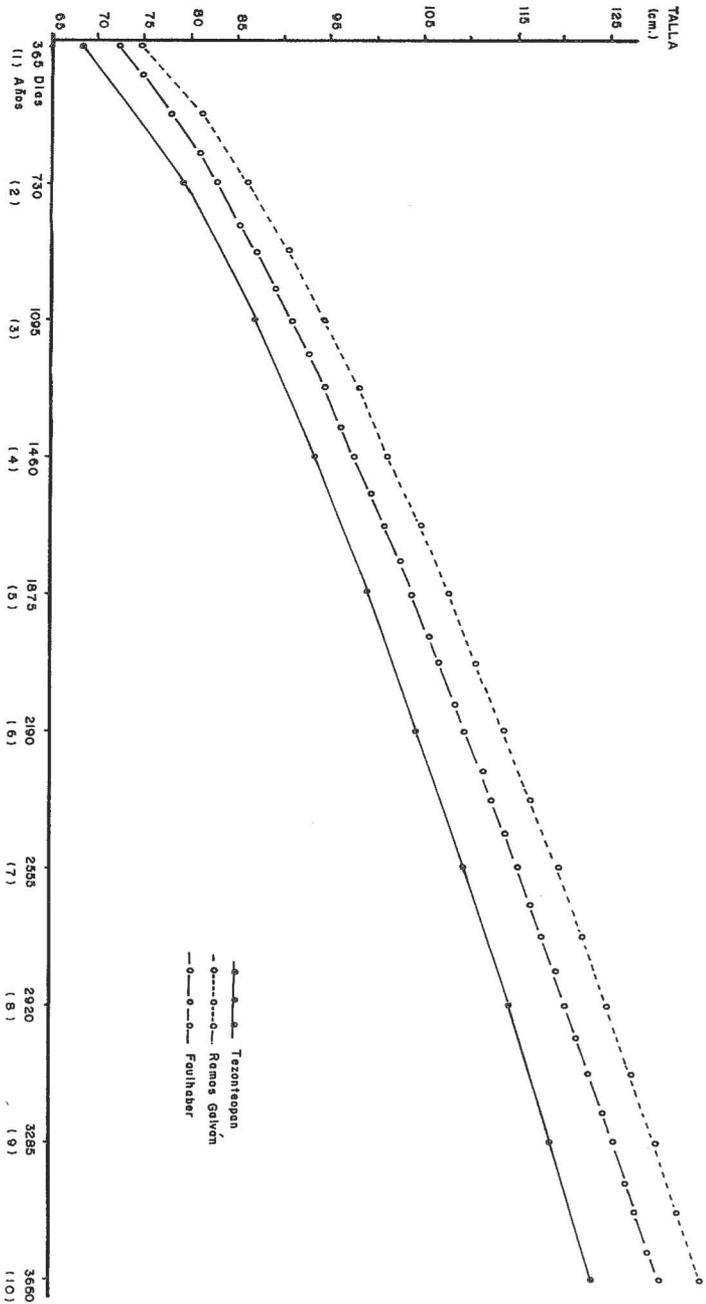


Fig. 10 CURVAS AJUSTADAS A LA TALLA

TEZONTLEOPAN (grupo testigo:  $\sigma^2, \bar{q}$ ):  $y = -0.738 + .008 t + 25.484 \log t$

RAMOS GALVAN ( $\bar{q}$ ):  $y = 7.781 + .011 t + 24.428 \log t$

FAULHABER ( $\bar{q}$ ):  $y = 10.281 + .011 t + 22.470 \log t$

CUADRO 7

VALORES PROMEDIO ± ERROR ESTÁNDAR, DE LOS  
PARAMETROS DEL MODELO DE COUNT AJUSTADO AL  
PESO, DE LOS NIÑOS DE TEZONTEOPAN, DE  
RAMOS GALVAN Y DE FAULHABER

$$y = b_0 + b_1 \cdot \text{edad} + b_2 \cdot \log(\text{edad} + e)$$

	$b_0$	$b_1$	$b_2$
Tezonteopan (grupo testigo, ambos sexos)	6.854 ± 1.610	.005 ± .000*	- 0.537 ± .625
Ramos Galván (sexo femenino)	14.979	.007	- 2.989
Faulhaber Sexo femenino	15.001	.007	- 3.450

\* SPSS da únicamente 3 decimales.

talla y el peso respectivamente. Se puede notar que los valores para las muestras de Ramos Galván y Faulhaber, con la excepción del  $b_2$  de la curva ajustada a la talla de los niños de Ramos Galván no están incluidos en los intervalos de confianza calculados para la población de Tezonteopan, lo que significa que se tiene un 95% de confianza de que no coincide con estos últimos. De esto, se concluye que los patrones de crecimiento de las niñas de Ramos Galván y de Faulhaber son diferentes del de Tezonteopan, es decir más reducidos, como se puede apreciar gráficamente en las figuras 7 a 10.

El cuadro 8 muestra la diferencia en la bondad del ajuste, en los tres casos. Este es mucho mejor para los estudios de Ramos Galván y de Faulhaber, debido al mayor número de niños en las muestras.

4. Conclusión

Se han descrito dos ejemplos de aplicaciones de modelos de crecimiento, indicando algunos de los problemas que requieren atención especial. No se pretende haber expuesto en detalle todas las sutilezas que este tipo de metodología implica, como son la valora-

ción de las suposiciones sobre las cuales está basado el modelo, el tratamiento de observaciones aberrantes, etcétera. Se indicaron las limitaciones del análisis debido a lo inadecuado del paquete estadístico de biblioteca utilizado, limitaciones que desaparecerían de tenerse la versión mas reciente de SPSS o bien paquetes alternativos como el BMDP. Con todo y esto se espera haber podido convencer de que la metodología descrita es sencilla y eficiente, siempre y cuando el modelo seleccionado sea adecuado y de haber dado una idea de sus vastas posibilidades de utilización.

Este material forma parte de la tesis que se presentará a la Escuela de Posgrado de la Universidad de Maryland, en cumplimiento parcial de los requerimientos para la obtención del grado de Ph D. en nutrición.

### CUADRO 8

#### BONDAD DE AJUSTE DEL MODELO DE COUNT AL CRECIMIENTO EN TALLA Y PESO, DE LOS NIÑOS DE TEZONTEOPAN, DE RAMOS GALVAN Y DE FAULHABER

(edad 1–10 años)

$$y = b_0 + b_1 \cdot \text{edad} + b_2 \log(\text{edad}) + e$$

	<i>Cuadro medio residual</i>	<i>R<sub>2</sub></i>
<b>TALLA</b>		
Tezonteopan (grupo testigo, ambos sexos)	1.127	.995
Ramos Galván (Sexo femenino)	.098	.9997
Faulhaber (Sexo femenino)	.171	.9996
<b>PESO</b>		
Tezonteopan (grupo testigo, ambos sexos)	.262	.989
Ramos Galván (Sexo femenino)	.148	.997
Faulhaber (Sexo femenino)	.171	.997

REFERENCIAS

BERKEY, C.S.

1982 "Comparison of two longitudinal growth models for pre-school children", *Biometrics* 38:221-234.

BOCK, R.D.

1973 "A parameterization of individual growth curves", *Human Biology* 45:63-80.

BOCK, R.D. y D.M. Thissen

1976 "Fitting multicomponent models for growth in stature", *Proceedings of the ninth international Biometrics Conference*:431, Boston.

BOX, G.E.P.

1950 "Problems in the analysis of growth and wear curves", *Biometrika* 6:362-389.

COUNT, E.W.

1943 "Growth patterns of the human physique: an approach to kinetic anthropometry, Part. I", *Human Biology* 15:1-31.

COURTIS, S.A.

1932 *The measurement of growth*, Brumfield and Brumfield: Ann Arbor, U.S.

CHAVEZ, A. y C. Martínez

1978 *Nutrición y desarrollo infantil*, AIN-México, Nueva Editorial Interamericana, México.

DEMING, L.

1957 "Application of the Gompertz curve to the observed pattern of growth in length of 48 individual, boys and girls during the adolescent cycle of growth", *Human Biology* 29:83-122.

EL LOZY, M.

1978 "A critical analysis of the double and triple logistic curves", *Annals of Human Biology* 5:389-394.

FAULHABER, J.

1976 "Investigación longitudinal de crecimiento", *Colección Científica* 26, INAH.

## GOLDSTEIN, H.

- 1979 *The design and analysis of longitudinal studies. The role in the measurement of change*, Academic Press, London, U.K.

## GRIZZLE, J.E. y D.M. Allen

- 1969 "Analysis of growth and dose response curves", *Biometrika* 25: 357-381.

## ISRAELSOHN, W.J.

- 1960 "Methods for comparing growth type curves", *Biometrika* 20: 859-872.

## JENSS, R.M. y N. Bayley

- 1973 "A mathematical method for studying the growth of a child", *Human Biology* 9: 556-563.

## JOOSENS, J.V. y E. Brems-Heyns.

- 1975 "High power polynomial regression for the study of distance, velocity and acceleration of growth", *Growth* 39:535-551.

## MARUBINI, E.

- 1978 "The fitting of longitudinal growth data in man", *Auxology: Human growth in health and disorder*:123-132, L. Gedda y P. Paris (eds.), Academic Press, London, U.K.

## MARUBINI E. y L.F. Resele

- 1971 "Computer program for fitting the logistic and the Gompertz function to growth data", *Computer Programs in Biomedicine* 2:16-23.

## MATA, L.J.

- 1978 *The children of Santa María Cauqué: a prospective field study of health and growth*, MIT, Press, Cambridge, Mass.

## MERRELL, M.

- 1931 "The relationship of individual growth to average growth", *Human Biology* 3:37-70.

## NIE, N.H., C.H. Hull, J.G. Jenkins, K. Steinbrenner y D.H. Bent

- 1975 *SPSS*, 2nd. edition, McGraw & Hill, New York.

PEARL, R. y J. Reed

- 1925 "Skew growth curve", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States* 11:16-22.

PREECE, M.A. y M.J. Baines

- 1978 "A new family of mathematical models describing the human growth curve", *Annals of Human Biology* 5:1-24.

RAMOS GALVAN, R.

- 1975 "Somatometría Pediátrica", *Archivos de Investigación Médica del IMSS* 6, (suplemento 1).

RAO, C.R.

- 1965 "The theory of least-squares when parameters are stochastic and its application to the analysis of growth curves", *Biometrika* 52:447.

ROBERTSON, T.B.

- 1908 "On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance", *Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen* 25:581-614.

SCAMMONS, R.E. y L.A. Calkins

- 1939 *The development and growth of the external dimensions of the human body in the fetal period*, The University of Minnesota Press, Minneapolis.

SHUTTLEWORTH, F.K.

- 1937 "Sexual maturation and the physical growth of girls age six to nineteen", *Monograph of the Society for Research in Child Development* 2:5.

STUETZLE, W., Th. Gasser, L. Molinari, R.H. Largo, A. Prader y P.J. Huber

- 1980 "Shape-invariant modelling of human growth", *Annals of Human Biology* 7:507-528.

TANNER, J.M., M.J.R. Healy, R.D. Lockhart, J.D. Mackenzie, R.H. Whitehouse

- 1956 "The prediction of adult body measurements from measurements taken each year from birth to five years", *Archives of Disease in Childhood* 31:327-381.

TANNER, J.M. (ed.)

1962 *Growth at adolescence*, 2nd edition, Blackwell Scientific Publications; Oxford, U.K.

TANNER, J.M., R.H. Whitehouse, E. Marubin, L.F. Resele

1976 "The adolescent growth spurt of boys and girls of the Harpenden growth study", *Annals of Human Biology* 3/2:109-126.

WEISS, P., J.C. Kavanau

1957 "A model of growth and growth control in mathematical terms", *Journal of General Physiology* 41:1-47.

WINGERD, J.

1970 "The relation of growth from birth to two years to sex, parental size and other factors, using Rao's method of the transformed time scale", *Human Biology* 42:105-131.

WINSOR, C.P.

1932 "The Gompertz curve as a growth curve", *Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.)* 18:1-8.