

UNA PROPUESTA METODOLOGICA PARA MEDIR LAS CURVATURAS DE LA COLUMNA VERTEBRAL

José Luis García Quintanar*

Consideraciones Generales

Las investigaciones acerca del origen y la existencia del hombre son amplias y constantes. Las ciencias antropológicas muestran y han comprobado que la variabilidad del ser humano es tal, que aún recapitulando los estudios hechos y que se hacen con estas perspectivas no se puede llegar a una conclusión única y total de la categoría "Hombre". Al enmarcar al hombre en los estudios de la antropología física, se buscan los aspectos biológicos del ser humano en su origen o contemporaneidad, con criterios de semejanza o diferencia entre las poblaciones; en consecuencia, cualquier aportación científica que se haga con esta intención acrecienta, aunque sea en grado mínimo, lo que se conoce, ofreciendo perspectivas y enfoques que sirven de normas para interpretar al complejo *Homo sapiens*.

Se puede observar que la columna vertebral es el conjunto de elementos óseos, quizá el más importante, que conforma el esqueleto del hombre; su estudio ofrece varias alternativas antropológicas, de tal manera que pueda ser vista como unidad o considerada por las partes que la integran, su función, su morfología, sus aspectos adaptativos, evolutivos, o bien, las diferencias que pudiese tener dentro de un grupo y con otros grupos humanos.

La espina dorsal tiene tal importancia que desde una temprana edad embrionaria, cuando apenas es un esbozo, marca la simetría bilateral en los animales del *Phylum Chordata*; más tarde, es la estructura en cuyo interior lleva y protege la médula espinal, órgano donde radica la vida sensorial y motriz; además, con una variada morfología, según la especie, ejerce la función de sostén. En el *Homo sapiens* le confiere la posición erecta y le permite el

* Jefe del Colegio de Ciencias Sociales del Colegio de Bachilleres.

andar bípedo; por la combinación de sus elementos que forman curvas, a diferencia de una columna vertebral recta, incrementa la resistencia y el soporte a las presiones a grandes pesos que se ejercen sobre el organismo y conlleva la carga visceral en las vértebras dorsales, lumbares y sacras. Estas circunstancias confieren atractivo a cualquier estudio antropológico de la espina dorsal aunque, en general, los estudios sobre la columna vertebral son descripciones de sus elementos y se encuentran en los libros de anatomía, incluyendo los de anatomía comparada y aún en los de paleoantropología. Otros aspectos del raquis que se han investigado son los patológicos: deformaciones, reumatismo, sífilis ósea, etcétera.

Los estudios antropológicos de la espina dorsal o de sus elementos son pocos y aunque desde el siglo pasado se conocen y se describieron las curvas (lordosis y cifosis) que la componen, no se dispone de trabajos antropométricos sobre este tema.

El estudio de las curvas de la columna vertebral no es nada nuevo, ya que desde el siglo pasado fueron investigadas y descritas. Cunningham, entre otros, demostró que estas curvas en el ser humano no son primitivas, sino adquiridas; hoy en día no ha cambiado este juicio. Se considera que son cuatro las curvas que componen la disposición de la columna vertebral en el hombre adulto: "estas cuatro curvas fisiológicas se denominan lordosis cervical y lumbar, de convexidad anterior y cifosis dorsal y sacra, de convexidad posterior".¹

En la etapa embrionaria aparece la primera curvatura de la columna cuando la posición caudal del embrión se enrolla; la curva es simple y convexa dorsalmente, esto se mantiene entre el tercer y sexto mes de vida intrauterina, la segunda se presenta en el ángulo sacrovertebral, y es cóncava ventralmente. Al nacer el ser humano, la morfología de la columna tiene un esbozo de curva de convexidad posterior a la altura torácica lumbar y una curva sacra; "la cabeza, la cadera y las rodillas son flexibles y cuando la cabeza se coloca en posición erecta describe una curva cervical de convexidad anterior".²

Después de varios años se osifica la columna vertebral; antes de que esto ocurra, el desplazamiento que sucede por la extensión de la cadera origina la postura bípeda y erecta. "El músculo psoas actúa directamente sobre la posición y hace que aparezca la curva

¹ R. Carlliet, *Escoliosis: Diagnóstico y atención de los pacientes*, 1977:4, Ed. Manual Moderno, México.

² Epstein. *The Spine*, 1976:77; Lea and Febiger Philadelphia, USA.

lumbar".³ Actualmente se sabe que la curva lumbar es responsable de la locomoción bípeda aunque, como dicen Schults y Napier, esta curvatura no ha alcanzado el total desarrollo dentro de la evolución. Otros autores, como Cunningham citado por Testut,⁴ afirman que la curvatura lumbar ya se encuentra en monos superiores, con algunas variantes respecto a los límites verticales.

La curva cervical presente en el adulto aparece en la infancia, al tercer mes de vida del niño, cuando adquiere la habilidad de sentarse; esta curva no es fija; está presente en la postura de pie pero no cuando el cuerpo se encuentra horizontal.

La curva dorsal o torácica y la curva sacra, en posición de descanso están presentes desde que el individuo nace, por lo cual se clasifican en curvas primarias o de acomodación, mientras que la lumbar y la cervical, convexas hacia adelante (cifosis), son consideradas como secundarias o de compensación. Las curvas primarias que existen desde el feto tienen como función el acomodamiento de las vísceras. Las curvas secundarias o de acomodación mantienen la posición erecta y se desarrollan por los cambios que se presentan en los discos intervertebrales.

Las prominencias máximas de la curva cervical se encuentran en el cuerpo de la cuarta vértebra de esta región y finaliza en la segunda dorsal. La porción más prominente en la curva dorsal se encuentra entre la séptima y octava vértebra dorsales y termina, en la doceava vértebra dorsal y la primera lumbar. La curva lumbar se describe entre la última torácica y el sacro.

En la columna vertebral no sólo se observan curvas en la línea sagital sino que en la línea transversa se localiza la quinta curvatura, secundaria o de compensación; se llama coliosis fisiológica lateral derecha y es una desviación que tiene la columna hacia la derecha ocasionada por el acomodamiento del corazón y los plexos venosos. Asimismo se puede observar el desplazamiento que origina el hígado sobre la columna. En la región dorsal se denomina comprensión aórtica, mientras en la región sacra se conoce como comprensión hepática.

Las curvas están alternadas y son responsables de la fuerza y resistencia de la columna. Morris⁵ señala que tales curvas aumentan 16 veces más la resistencia a la presión que en el alineamiento recto.

³ J. Napier. *The Antigenty of Human Walking, Human variations and origins; an introduction to human biology and evolutions*, 1967:122, W. A. Freeman and Cy. SF y London.

⁴ L. Testut. *Tratado de Anatomía Humana*, 1965:83, Ed. Salvat, Barcelona, España.

⁵ Epstein. *Op. cit.*: 82.

Las curvas que describe la columna vertebral son aparentemente iguales en todos los seres humanos; no obstante, son muy diferentes en un niño, un adolescente o un hombre maduro. Más aún, al comparar a simple vista las curvaturas de la columna en dos hombres que utilicen su cuerpo en forma diferente, como un atleta y un empleado, se aprecian diferencias. Como se sabe, los huesos presentan caracteres diferentes específicos que permiten distinguir el sexo y la edad, lo que se comprueba en numerosos estudios que presentan las medidas y clasificaciones de los diversos huesos. El profesor Santiago Genovés dedujo de su estudio sobre el hueso coxal que, entre otros caracteres morfológicos, la diferencia entre el hueso masculino y el femenino es mensurable. El análisis de este elemento óseo por medio de las mediciones de la longitud y la anchura, y el cálculo del índice correspondiente, señala que el hueso coxal masculino es "más alto y estrecho mientras que el femenino es más corto y ancho".⁶ Si se considera que este hueso sólo ocupa la parte baja de la serie de elementos que integran la columna vertebral, se podría pensar que deben existir otras diferencias cuantificables en el conjunto vertebral como unidad, ya que las curvas que describe la columna vertebral pueden manifestar diferencias de tipo sexual, aunque es necesaria la búsqueda de una metodología que ofrezca datos que confirmen o rechacen el dimorfismo sexual de las curvas vertebrales.

Este es solamente un aspecto derivado de la observación, tan importante como tantas otras posibilidades que brinda la columna vertebral como objeto de estudio; al respecto, se cuenta con los estudios antropológicos realizados con pocos elementos óseos por autores como LeGros Clark, Pette, Vallois,⁷ Nathan,⁸ que se basan en restos fósiles y Jaén,⁹ que analizó elementos óseos prehispánicos de México, quienes han investigado particularidades de los elementos vertebrales. Otros estudios de la columna vertebral han sido tratados por Shultz,¹⁰ principalmente de la región lumbar de los grandes monos, cuyos datos podrán usarse en el futuro para hacer inferencias que permitan indagar el devenir del ser humano.

⁶ S. Genovés. *Introducción al diagnóstico de la edad y del sexo en restos óseos prehispánicos*. Instituto de Investigaciones Antropológicas, UNAM, México, p. 82.

⁷ Vallois. *El proceso de hominización*, 1969, Coleg. 70's, Ed. Grijalbo.

⁸ Nathan. "The Pararticular processes of thoracic vertebral, 1959", *Anatomical record*, vol. 133, no. 4.

⁹ M.T. Jaén. "Variedades anatómicas en vértebras de la colección Tlatelolco 1974", *Anales del INAH*: 71-82.

¹⁰ Shultz. *The relative thickness of long bones and the vertebral primates*, 1977, AJPA, vol. II, no. 3:363, USA.

La idea es investigar principalmente el dimorfismo sexual expresado por los parámetros de normalidad que pueden obtenerse de las mediciones de la curva lumbo-sacra. Los valores podrán ser susceptibles de comparación, en los grupos de edad, sexo, raza u otros factores. La propuesta de un método puede ser el inicio de otras investigaciones encaminadas a resolver y responder dudas. Por ejemplo, se podría conocer el momento exacto en que aparece la curva lumbo-sacra durante el desarrollo del ser humano, ya que se sabe que los niños caminan bípedamente alrededor de los dos años de edad, cuando todavía no presentan osificación de las vértebras. Otra posibilidad sería investigar el momento cuando aparece la diferencia, si es que existe, entre la curvatura femenina y masculina, que quizá se presente después de la adolescencia, por lo que se podría interpretar como un carácter sexual secundario cuya investigación estaría relacionada directamente con la actividad hormonal y el desarrollo general de los individuos.

Si la curvatura aparece desde temprana edad y en ella se comprueba la existencia del dimorfismo sexual, quedaría por investigar si las situaciones que originan su manifestación son de tipo genético o de naturaleza mecánica. Otra pregunta por contestar sería si es posible indagar el momento en que surge la curvatura lumbo-sacra en la evolución humana, pues los estudios realizados por Napier¹¹ indican que los australopitecos ya se desplazaban en posición erecta. A partir de estas preguntas se puede apreciar el vasto campo por investigar que ofrece el enfoque de las curvaturas de la columna vertebral dentro del marco de la antropología.

Con estos intereses surgió el problema que antecede a cualquier estudio sobre el tema, ya sea el dimorfismo sexual, del origen o de las inferencias evolutivas de las curvas de la columna vertebral. El problema concreto radica en la medición de la curvatura de la columna vertebral.

La posibilidad de medir el cuerpo humano ha proporcionado a la antropología física los criterios esenciales para su propio desarrollo. Los aspectos biométricos son las herramientas que sirven para la comparación y la deducción; por medio de ellas se establece la correspondencia antropomorfa y se prueba la variabilidad del ser humano.

Los métodos conocidos y aplicados por los radiólogos y traumatólogos para medir la columna vertebral carecen de la precisión indispensable en la antropología física. Tanto el método de Cobb

¹¹ Napier. *Op. cit.*:126.

como el de Ferguson¹² usados en la medicina clínica para determinar la presencia o ausencia de la escoliosis (desviación lateral anormal de la columna vertebral) consisten en apreciaciones y aproximaciones mayores o menores de la curvatura escoliótica, en otras palabras, cumplen con su cometido de la diagnosis, pero no pueden ser usados en casos en que se desea gran exactitud.

En los dos métodos se traza una línea arbitraria donde el examinador considere que está la vértebra más alta y la más baja, luego se trazan dos líneas hasta que se corten entre sí, lo que indica que no importan los puntos de referencia por donde deban pasar las líneas.

Estos métodos, que podrían calificarse como de aproximativos ofrecen una perspectiva de la apertura, en mayor o menor grado, del ángulo que forman las dos rectas que lo delimitan, pero en ningún momento describen el tipo de figura del cateto opuesto, es decir, el ángulo mide la apertura del cuerpo cuya forma puede ser una recta o de forma irregular; en matemáticas este ángulo se conoce con el nombre de ángulo sólido.*

Dadas las características que tiene el método utilizado en la antropología física, es más importante conocer la forma de las curvaturas en la columna vertebral que los ángulos sólidos en su apertura, pues tal apertura se relaciona con la altura y puede calcularse con métodos más directos y más exactos, por lo que son necesarios otros tipos de medidas para conocer la forma de curvatura que, en esencia, sean susceptibles de representar la variabilidad de dichas curvas en la columna vertebral.

Si se sitúan puntos osteológicos precisos y se aplican técnicas que midan la curvatura, se evita la aproximación y, por lo tanto, el carácter especulativo en la medición de tales curvas. La ortodoxia y el purismo que debe tener una técnica antropométrica son factores obligados y rígidos, necesarios para poder duplicar el experimento cuantas veces se requiera y en las condiciones o las circunstancias que otras investigaciones de estas curvas demanden, a la vez que permiten la comparación de los datos obtenidos, tanto entre sí como con otros.

Otro tipo de medidas de la curvatura de la columna vertebral lo proporciona la antropología física: el índice de Cunningham,¹³

¹² Calliet, *Op. cit.*:6.

* Angulo sólido es el que se traza desde el vértice del ojo hasta los límites de apreciación de una figura, independientemente de la forma de ésta; el ángulo describe un cono en su base.

¹³ J. Comas, *Manual de Antropología Física*, 1960, UNAM, México.

propuesto por su autor el siglo pasado. Consiste en multiplicar por cien la suma de la altura posterior de las cinco vértebras lumbares —material seco— y dividir el resultado entre la suma de la altura anterior de esas mismas cinco vértebras lumbares: “sirve para apreciar la importancia y orientación de la curvatura lumbar. Valores menores de 100 significan curvaturas con convexidad anterior”.¹⁴

El índice vertebral es la relación de la altura posterior del cuerpo multiplicada por 100 y dividida entre la altura anterior del cuerpo vertebral, “permite determinar la mayor o menor amplitud de las diversas curvaturas de la columna vertebral”.¹⁵

En estos casos también se obtiene una medida de aproximación, ya que las mediciones se realizan directamente sobre los cuerpos óseos. Según la región que se estudie, las vértebras varían de tamaño. La curva que describen las caras anteriores de los cuerpos vertebrales en relación con las caras posteriores es mínima, a excepción del sacro que es un conjunto vertebral fusionado. En las regiones lumbar, dorsal y cervical, la curvatura está ocasionada por los discos intervertebrales; así, en la región lumbar, los discos intervertebrales tienen forma de cuña; es decir, son más anchos en su parte dorsal y más angostos en la ventral, mientras que en la región dorsal son casi horizontales; por lo tanto es el disco y no el cuerpo vertebral el que propicia directamente las curvaturas en la espina dorsal.

Es indudable que el índice Cunningham tiene limitaciones técnicas y científicas correspondientes a su época histórica; actualmente, la precisión y exactitud que se pueden obtener de un método en cualquier situación científica también está en relación directa con su momento histórico, y cada nuevo descubrimiento científico es mejor cuanto más avanza la tecnología.

Se ha visto que los métodos utilizados años atrás no han permitido apreciar con la exactitud deseada las curvaturas de la columna y mucho menos medirlas, de manera que se piensa en idear un método adecuado que permita mayor exactitud en la apreciación de las curvaturas *in vivo*. Este método se describe más adelante, aunque es pertinente aclarar que en este trabajo se trata únicamente lo referente a las curvaturas de las regiones lumbar y sacra.

¹⁴ *Ib.*

¹⁵ *Ib.*

El Método matemático

Una curva representada en los ejes de las coordenadas manifiesta la relación que existe entre las variables de una ecuación equivalente, cuyo divisor nunca es cero. Se conocen numerosos tipos de curvas y todos se pueden representar gráficamente. "La gráfica de una ecuación en R_2 * es el conjunto de todos los puntos de (x, y) , cuyas coordenadas son números que satisfacen la ecuación y son conocidos como el lugar geométrico de la ecuación o curva".¹⁶

El diagrama de dispersión es la representación de todos los puntos contenidos en la relación de dos variables. Esta representación tiene la característica de no ser lineal, por lo cual debe buscarse una ecuación que se ajuste al conjunto de los datos, lo que se llama "curva de ajuste". Si teóricamente se conoce el tipo de curva que ofrecen los datos, ésta se puede relacionar con la ecuación que la expresa en los ejes de coordenadas X e Y; así por ejemplo, si se trata de una recta se sabe que está determinada por dos puntos sobre esa recta y lo que se busca es la pendiente. Si se trata de una parábola es necesario conocer tres de sus puntos; esta figura tiene como característica la simetría respecto a un eje, en el cual se encuentra su foco y el vértice.

Las ecuaciones que expresan estos tipos de curvaturas se llaman polinomiales de primero, segundo o n grados; las funciones son de tipo lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica.

En las ecuaciones de curvas de ajuste, los valores de X y de Y se consideran como las variables independiente y dependiente; todas las demás letras de la ecuación representan constantes.

Se puede afirmar que la curva descrita por los elementos vertebrales en la región lumbar y en la región sacra corresponde al grupo de las parábolas cuyos puntos de distribución se encuentran en la fórmula:

$$y = a + bx + cx^2$$

donde la constante a es la interacción entre las dos variables; es decir, el punto de X que se cruza en Y, mientras que b es la pen-

* El plano numérico R_2 es el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales y cada una de estas parejas (x, y) se llama punto en el plano numérico. Así como se puede identificar R_1 en un espacio unidimensional R_2 se identifica en un espacio bidimensional; esta teoría se debe a Descartes (1596-1650), creador de la geometría analítica.

¹⁶ Spiegel. *Teoría y problemas de álgebra superior*, Serie de compendios, Schaum, McGraw-Hill, 1973:219.

diente o inclinación de la línea respecto al eje de referencia y se denomina m , que se identifica como la tangente del ángulo y se expresa de la siguiente forma:

$$m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \text{tang. de } \alpha$$

El signo negativo de la pendiente indica una relación inversa entre X e Y , es decir, cuando X aumenta, Y disminuye; c es una constante de proporcionalidad que indica la amplitud de la curva y el signo que conlleva señala hacia donde se abre la curva sobre los ejes de coordenadas dando lugar a cuatro posibilidades:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y^2 = 4p x & \text{c) } y^2 = -4p x \\ \text{b) } x^2 = 4p y & \text{d) } x^2 = -4p y \end{array}$$

Cuando se mide una curva directamente y se representa en una gráfica, pueden existir errores; el cálculo de su ecuación más idóneo será el que represente la curva de aproximación cuadrática —parábola en este caso— y será aquella en la que la suma de los cuadrados de la distancia D sea mínima, entendiéndose por D la desviación que existe entre un dato obtenido por medición y la diferencia con el dato del cálculo matemático. En la representación gráfica, para todo punto en la variable independiente X existe un punto en la variable dependiente Y , es decir, a x_1 le corresponde y_1 , a x_2 le corresponde y_2 , a x_n le corresponde y_n . Se sabe que la fórmula de una recta es, por definición,

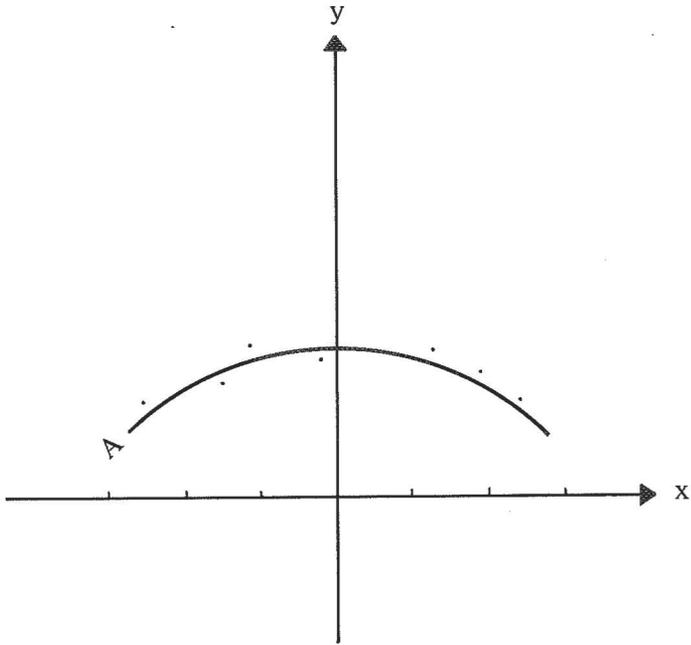
$$y = a + b x$$

Por lo tanto, para los diversos puntos de (x, y)

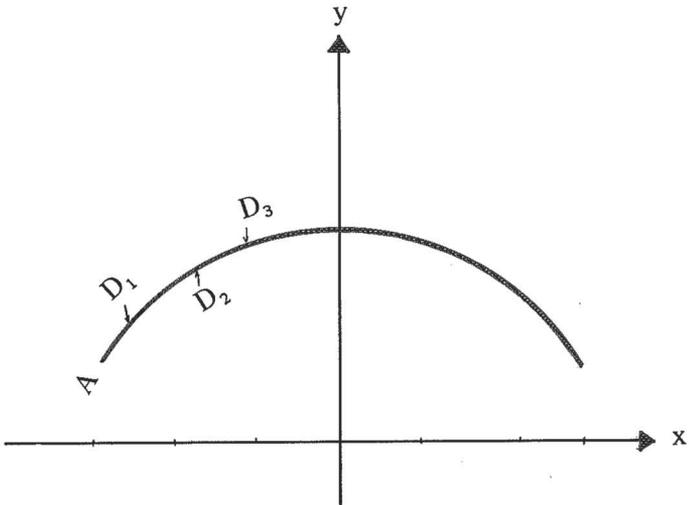
$$Y_1 = a + b x_1, \quad Y_2 = a + b x_2 \quad \dots \quad Y_n = a + b x_n$$

El error, desviación o residuo D de una curva puede ser positivo, negativo o cero.

Por ejemplo, en el siguiente caso, donde la curva A se representa en dos ejes cartesianos:



D será igual a la distancia que existe entre el punto teórico y el punto real en Y, por lo cual se tendrá: D_1 para (x_1, y_1) , D_2 para (x_2, y_2) y D_n para (x_n, y_n) , es decir, la distancia de 'y' teórica menos la distancia de 'y'₁ calculada.



El método de los mínimos cuadrados dice que la suma de los cuadrados de las desviaciones, cuando es mínima, presenta la mejor curva de ajuste, por lo que se puede expresar como:

$$A = D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2$$

donde A representa la mejor curva de ajuste.

Si se sustituye la fórmula de la recta en Y, se tendrá:

$$D^2 = (a + bx - y)^2$$

por lo tanto, sustituyendo A:

$$A = (a + bx_1 - y_1)^2 + (a + bx_2 - y_2)^2 + \dots + (a + bx_n - y_n)^2$$

Derivando parcialmente lo correspondiente en a, todas las demás variables se mantienen constantes:

$$\frac{dA}{da} = 2(a + bx_1 - y_1) + (a + bx_2 - y_2) + (a + bx_n - y_n) = 0$$

$$\frac{dA}{da} = (a + bx_1 - y_1) + (a + bx_2 - y_2) + \dots + (a + bx_n - y_n) = \frac{0}{2} = 0$$

Derivando parcialmente en b, se tiene:

$$\frac{dA}{db} = 2(a + bx_1 - y_1)X_1 + (a + bx_2 - y_2)X_2 + \dots + (a + bx_n - y_n)X_n = 0$$

Al realizar las operaciones resulta que para a:

$$na + b \sum x - \sum y = 0 \dots \dots 1$$

$$a \sum x + b \sum x^2 - \sum xy = 0 \dots \dots 2$$

Despejando y en ambas ecuaciones se obtiene la ecuación de los mínimos cuadrados para la recta:

$$y = na + b x$$

$$xy = a \sum x + b \sum x^2$$

Aplicando el mismo método para la parábola, cuya representación gráfica es de tipo cuadrático, resulta que la fórmula de la parábola es:

$$y = a + bx + cx^2$$

La fórmula de la desviación o error en la curva A:

$$A = D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2$$

y sustituyendo los valores de y

$$A = (a + bx_1 + cx_1^2 - y_1)^2 + (a + bx_2 + cx_2^2 - y_2)^2 + \dots + (a + bx_n + cx_n^2 - y_n)^2 = 0$$

Derivando parcialmente en sus variables (ver el ejemplo anterior) se tiene:

$$na + b \sum x + c \sum x^2 - \sum y = 0$$

$$a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 - \sum xy = 0$$

$$a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 - \sum x^2 y = 0$$

despejando y, xy, $x^2 y$ y correspondientes a cada ecuación se obtiene:

$$\sum y = na + b \sum x + c \sum x^2$$

$$\sum xy = a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3$$

$$\sum x^2 y = a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4$$

Σ = sumatoria

Estas fórmulas corresponden a la solución de los mínimos cuadrados para las parábolas, donde las constantes pueden resolverse por medio del sistema de ecuaciones simultáneas o por determinantes.

Tanto el caso de la recta de los mínimos cuadrados como en el de la parábola, el sistema de ecuaciones se simplifica si se le adjudican valores a X de tal forma que su sumatoria sea cero, representativo para X^3 .

En este sistema de ecuaciones se observa que existen valores comunes, tales como sumatoria de X, sumatoria de X cuadrada, cúbica y cuarta. Con el objeto de simplificar la técnica se recomienda presentar los cálculos en forma de tablas.

Resolución del sistema de ecuaciones por medio de determinantes.

Se conoce como determinante la expresión de dos o más columnas en una matriz que expresa en forma desarrollada cada término como producto de dos cantidades, cuando es de segundo orden; si es de tres columnas y tres filas será de tercer orden. En las dos ecuaciones lineales homogéneas:

$$1 \dots\dots\dots a_1 x + b_1 y = 0$$

$$2 \dots\dots\dots a_2 x + b_2 y = 0,$$

si se multiplica la primera ecuación por (b₂ y), la segunda por (b₁ y—, y se dividen entre X se obtiene:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

El cual se puede expresar en forma de matriz:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

En el caso de tres ecuaciones simétricas homogéneas y lineales:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0,$$

eliminando a X, y a Z se observa que:

$$a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (c_2 a_3 - c_3 a_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0$$

es decir:

$$a \begin{vmatrix} b_2 & c \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

lo cual se puede expresar en una sola matriz por la característica de la multiplicación de las matrices:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Los números que conforman una matriz se llaman elementos de la matriz. El arreglo de los elementos en forma horizontal se conoce como filas de la matriz y el arreglo de los elementos de forma vertical se denomina columnas. Las matrices se pueden sumar siempre y cuando sean del mismo orden.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (2 + 1) & (1 + 3) \\ (1 + 2) & (3 + 4) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

También se puede sumar las inversas de la matriz $A = -A$.

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad -A = \begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix}$$

La función Delta.

El determinante delta en una matriz de segundo orden se forma sumando el primer elemento de la primera columna con el segundo elemento de la segunda columna y al resultado se le resta la suma del segundo elemento de la primera columna con el primer elemento de la segunda columna.

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

para un determinante de orden cuadrático la función delta se obtiene:

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= (a_1 b_2 c_3) + (a_2 b_3 c_1) + (a_3 b_1 c_2) \\
 &\quad (a_3 b_2 c_1) - (a_1 b_3 c_2) - (a_2 b_1 c_3)
 \end{aligned}$$

Aspectos técnicos

El proceso técnico del estudio lo integraron tres fases esenciales:

- Tomar las radiografías de la región lumbo-sacra de la columna vertebral.
- Dibujar los esquemas a partir de las radiografías.
- Trazar gráficas sobre los esquemas como base de las medidas de las curvas lumbar, sacra y lumbo-sacra.

La toma de las radiografías

Los problemas que pudieran interferir desde el punto de vista técnico en un estudio que incluye radiografías son fáciles de controlar. Una de ellas es el aparato, ya que todas las radiografías deben ser tomadas con el mismo aparato para evitar interferencias de tipo mecánico y óptico. Por otro lado, se ha comprobado que la postura está influida por situaciones de tipo psicológico; las personas conscientes de que son observadas adquieren falsas posturas, aún más cuando se les toma una radiografía y la posición adoptada puede afectar a la curva lumbo-sacra, pues levantan o bajan los hombros, convexas la cadera, estiran el cuello, etcétera. Estas circunstancias deben preverse y controlarse mediante una estandarización de la postura para evitar graves errores en las medidas y en las interpretaciones de la curva lumbar.

En este estudio, gracias a la ayuda que se recibió del doctor Guillermo García Sánchez, quien amablemente proporcionó su

gabinete particular, se usó un aparato radiográfico Watson Phillips de 500 miliamperes; el tiempo de exposición, al igual que los kilovoltios variaron para cada individuo, dependiendo del espesor del sujeto. Las placas radiográficas usadas fueron Kodak de 14 x 17 pulgadas, y la distancia del aparato al sujeto fue de un metro constante en todos los casos. La postura se controló colocando al sujeto en posición de pie, con los pies juntos, con el flanco izquierdo hacia el aparato, la cabeza en el plano de Frankfort, los brazos levantados y las manos sobre la nuca; cuando se dispara el aparato, el sujeto debe sostener la respiración durante el periodo del disparo, sin moverse ni alterar la posición. Con estas recomendaciones como constantes se nulifica el error o por lo menos se reduce al máximo.

Los esquemas

No se recomienda trabajar sobre las radiografías, ya que el material donde se imprimen y la cancelación de la posibilidad de cualquier otro estudio posterior sobre dichas radiografías son factores principales que impiden el trazo directo; por lo tanto, debe hacerse esquemas de ellas.

Los esquemas que se elaboran de las radiografías requieren un control técnico riguroso, lo que se logra por medio de la continuidad y la constancia en los trazos. Los dibujos deben ser repetidos tantas veces como se considere necesario, pues los primeros quizá carezcan del sentido de observación, principalmente de los detalles esenciales para las mediciones de las curvas de la columna vertebral radiografiada. Este sentido de observación se adquiere con la experiencia y se alcanza mejores resultados y más fidedignos cuando la práctica visual y manual es mayor. Las radiografías de la columna vertebral se colocan en un negatoscopio de mesa, de tal forma que la curva sacra se abra hacia la izquierda. La orilla de la radiografía se fija a la orilla de la mesa, lo que avala que se encuentre recta. Se coloca la cantidad de papel de acetato necesario sobre la radiografía y una hoja de papel albanene intermedia que también se fijan para evitar su movimiento y el de la radiografía.

Se usó papel acetato de espesor medio, por su transparencia, resistencia y durabilidad que garantiza la permanencia del esquema aunque presenta el problema de reflejar la luz; el papel albanene sirvió como pantalla para poder apreciar mejor la imagen. La proyección de la radiografía se puede malinterpretar si no se identi-

ficar con claridad el plano anterior de la proyección, ya que a manera de sombra, con mayor o menor intensidad, en ocasiones aparece el plano de la cara posterior de los cuerpos vertebrales.

En el trazado de los dibujos de la región lumbar se deben señalar los cuatro puntos vértices de cada uno de los elementos vertebrales (fig. 2); después con un curvígrafo estándar se dibujan los cuatro lados de cada una de las vértebras. La proyección vista de izquierda a derecha de las vértebras ofrece un lado ventral cóncavo y un lado dorsal convexo mientras que de arriba hacia abajo la cara superior es cóncava y la inferior es convexa. Al mismo tiempo, cada cuerpo vertebral describe una curva con un radio específico, y en conjunto conforman la curva lumbar, suma de las curvaciones de los cuerpos vertebrales y los discos intervertebrales.

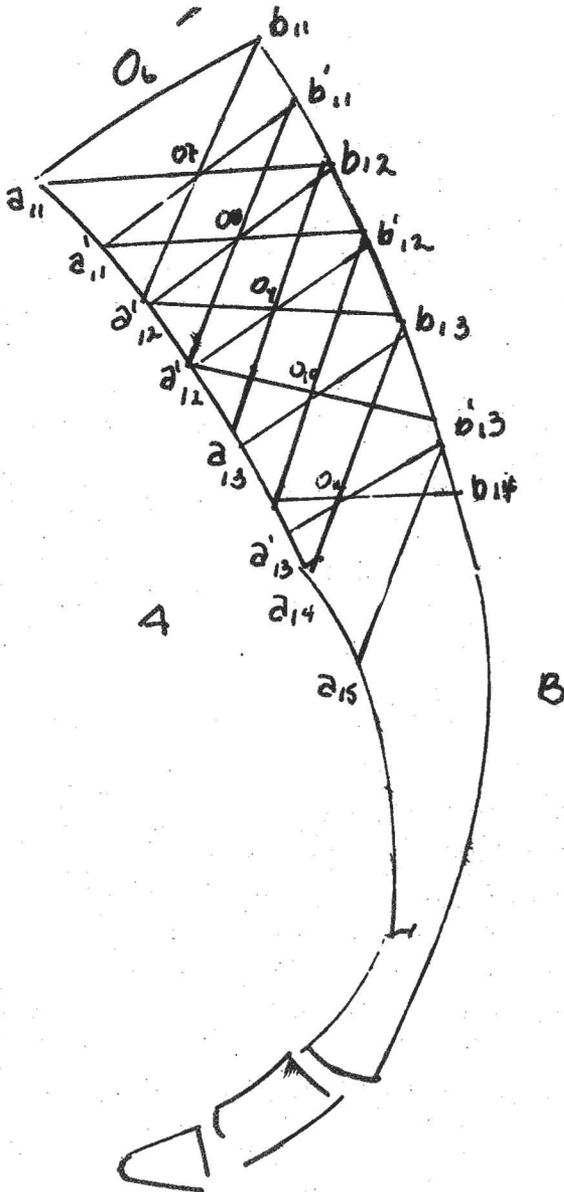
Los cuerpos vertebrales que compone el sacro también describen una curva general, más homogénea debido a la unión de los elementos óseos. La elaboración de los dibujos del sacro fue diferente a los de la región lumbar; se localizaron en la proyección los puntos vértices superiores del primer elemento del sacro (fig. 1) los puntos sobresalientes de la segunda vértebra sacral y el vértice del cóxis; después, con el curvígrafo se localizó la curva que correspondía con el esquema y se unieron los puntos. Por último se localizó la curva lumbo-sacra, (cifosis), opuesta a las dos anteriores, entre la máxima inclinación de la tercera vértebra lumbar y la máxima concavidad del sacro. En un lugar visible y constante del esquema se apuntaron los datos generales, como el nombre, la edad, la estatura, el peso, el sexo y el nivel escolar del sujeto.

Trazos de gráficos

Con el perfil del dibujo de la columna vertebral se procedió a hacer los trazos básicos que servirían como ejes de las medidas.

Para poder identificar las líneas que se trazaron, se usó como criterio rector denominarlos con las letras A, B y O. "A" mayúscula es la línea que corre por todo el borde ventral de la columna, las "a" minúsculas con subíndices indican cada punto que se señaló sobre este borde (fig. 1).

El mismo criterio se usó en el borde dorsal donde se fueron las letras B y b. Las letras "O" y "o" identifican la línea curva y los puntos que recorre y unen los centros vertebrales. Es decir, los primeros puntos que se señalaron de la parte superior de la sección lumbar de la columna son: $a_1, a_2 \dots a_n$ (ventral); $b_1, b_2 \dots b_n$ (dorsal); y $o_1, o_2 \dots o_n$.



Esquema I del perfil del sacro donde se muestra cómo fue el muestreo base de los cálculos. Se observan el lado a con sus puntos correspondientes a_{11} , a_{12} , a_{13} ... etc. El lado b con sus puntos correspondientes b_{11} , b_{12} , b_{13} ... etcétera la línea que corresponde en el centro del sacro se dibuja con los cruces de las líneas a y b.

Trazos de las coordenadas en la región sacra

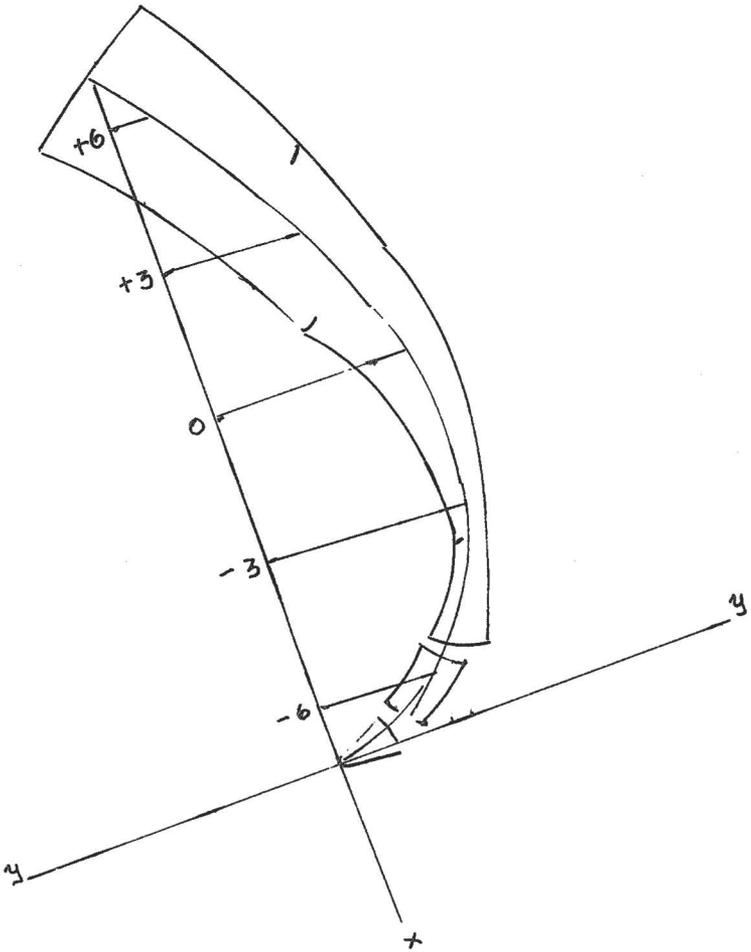
En la curva sacra se obtuvo el centro de los elementos vertebrales en la forma siguiente. Se mide la proyección del borde superior (ancho del sacro) y se señala la mitad (O_6); de los vértices superiores (a , y b ,) de la primera vértebra sacra se trazan líneas diagonales hacia los bordes laterales opuestos (a , hacia b' , y b , hacia a' ,), a una distancia de 3 cm. A la altura del cruce de las líneas (O_6) se traza horizontalmente la anchura sacra. A partir de estos puntos a , , b , , O_6 se repite la operación tantas veces como lo largo del sacro lo permita (fig. 2). Con el curvígrafo se unen los puntos señalados por los cruces y la línea resultante (o) describe la curva del sacro (fig. 3).

Con la escuadra se traza el eje X que va desde el punto O_6 (la mitad del ancho del sacro en el borde superior) hasta el vértice del coxis y en su mitad se señala el punto cero del eje X. Las medidas a partir del cero son en esta ocasión distancias de tres centímetros por el tamaño pequeño del sacro en comparación con la longitud de la región lumbar, y los puntos de referencia son -6 , -3 , 0 , $+3$, $+6$.

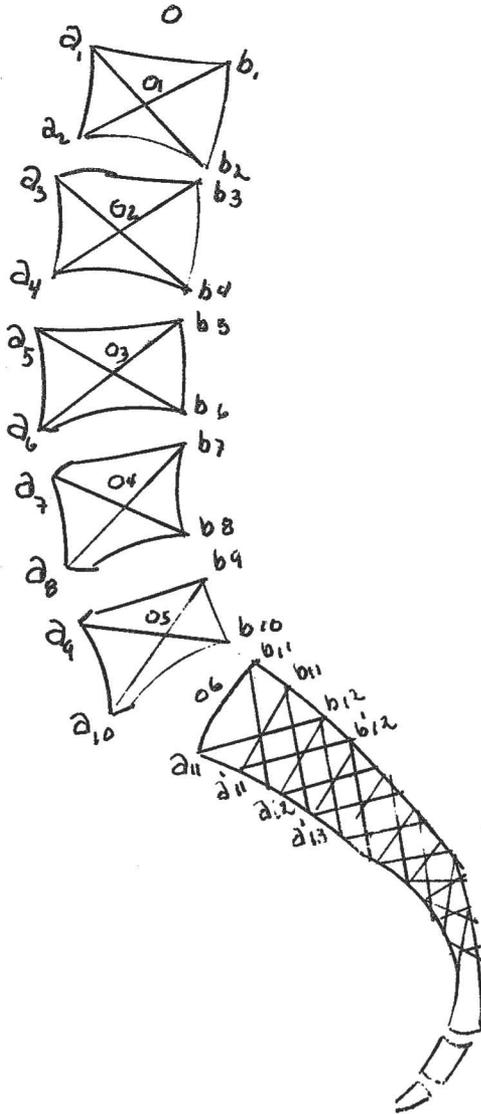
Los puntos que se fijaron sobre el eje X (variable dependiente) no fueron elegidos arbitrariamente, sino que la longitud total de la curva lumbar marcó el criterio; así, se encontró que la media de las longitudes desde el primer elemento vertebral al quinto era de 16.0 cm, por lo cual, al situar puntos de 4 cm, la altura en la curva y para los puntos de $+8$ y -8 correspondieron con un valor de cero a una fracción mínima, lo que evitaba un exceso de cálculos matemáticos. No fue posible aplicar este criterio para las medidas del sacro, ya que la media era de 13.2 cm de longitud y hacer coincidir 13.2 cm con una $Y = 0$ presenta complicaciones por las fracciones decimales, por lo cual se situaron los puntos a 3 cm de distancia.

Trazos de las coordenadas en la región lumbar.

En cada elemento vertebral de la columna lumbar (fig. 3) se trazaron líneas diagonales de vértice a vértice opuesto, dibujando una cruz, en cuya intersección se localizó el centro de la vértebra. Con el curvígrafo se trazó la línea "O" que une todos los centros de las vértebras y describe la curva lumbar; dos escuadras una de 45° y la otra de 30° , sirvieron para los trazos rectos. El eje X va



Esquema II del perfil del sacro donde se muestra los trazos de los ejes X e Y y las alturas de Y en los puntos +6, +3, 0, -3 y -6.



Esquema III donde se observa el trazado de las líneas a, b u o de las regiones lumbares y del sacro. En la región lumbar los cuerpos vertebrales indican con el cruce su centro. En la región del sacro se tuvo que diseñar otro método. (Ver texto).

del centro de la primera vértebra lumbar (O_1) al centro de la quinta (O_5), y se mide en su totalidad. A la mitad se marcó el punto cero y a ambos lados de éste se señalaron otros dos, a 4 y 8 cm de distancia, para obtener un total de 5 puntos de referencia a saber, $-8, -4, -0, +4$ y $+8$.

En la región lumbar, las medidas se obtienen desde los puntos prefijados en el eje X hasta la altura de la curva en el eje Y. Se coloca la escuadra de 30° en el eje X y la de 45° sobre la de 30° , de tal forma que la unión de ellas sea de 90° . A partir de los puntos $+8, +4, 0, -4, -8$, prefijados para X en la región lumbar se mide exactamente la altura en el corte con la curva "o" y se anota el dato.

Este trabajo fue aplicado a jóvenes de ambos sexos entre 18 y 21 años.

La selección de la muestra se hizo tomando en cuenta dos criterios de la investigación: las diferencias entre las curvas de la columna vertebral femenina y masculina y la posible normalidad de tales curvas, es decir, tratando de evitar malformaciones o transformaciones por circunstancias biológicas (como la edad) o de tipo social (como es el trabajo), pues se piensa que existen cambios y alteraciones de las curvas debido a estas dos causas. Tales criterios son satisfechos por los jóvenes de 18 a 21 años de edad, pues teóricamente apenas han concluido su maduración ósea y se afirma que "después de los 23 años el núcleo pulposo y las fibras de cartílago de los discos intervertebrales se empiezan a deshidratar",¹⁷ lo que afecta la curvatura lumbar. En cambio, aunque el sacro no haya terminado su maduración ósea, esto no afecta la curvación, pues las piezas determinantes de la curva se unen entre los 13 y 17 años. De los 99 sujetos del estudio, 49 mujeres y 50 hombres, estudiantes de 5o. semestre del Colegio de Bachilleres, plantel no. 1, se hicieron grupos por edades de 18, 19, 20 y 21 años, tanto para un sexo como para el otro. Es importante señalar que se formó un grupo femenino de 17 años, pero que no se tomó en cuenta para los cálculos, ya que no existe un grupo masculino correspondiente.

De las 99 radiografías se eliminaron nueve, por razones técnicas, ya que algunas eran borrosas con bordes confusos y en otras no aparecía el coxis. Los grupos por edad se formaron tomando en cuenta la fecha de la radiografía en relación a la fecha del nacimiento.

¹⁷ Epstein. *Lumbar spinal stenosis*, 1977.

Aplicación del procedimiento matemático

Sobre los esquemas de las columnas vertebrales de la muestra de este estudio, codificados de 001 a 089 para su identificación y agrupados por sexo y edad, y con el eje X trazado, medido y dividido en los cinco puntos ya descritos se procedió a medir con la escuadra y el escalímetro la altura en milímetros de la curva, medida que corresponde al eje y por cada punto en X. Los datos se anotan de tal forma que puedan ser sumados en relación a cada punto, con el objeto de obtener una "y" (media) por punto, para cada grupo por edad y sexo.

Ejemplo:

TABLA DE CODIFICACION DE LOS PUNTOS DE Y EN X
PARA EL CASO DE VARONES DE 18 AÑOS CURVA LUMBAR

CODIF. X	8	4	0	-4	-8
034	0.1	1.2	1.5	1.5	0.1
035	0.0	0.7	1.5	1.3	0.1
036	0.0	1.0	1.4	1.5	0.0
037	0.0	1.0	1.4	1.1	0.0
038	0.0	1.0	1.4	1.2	0.0
039	0.2	1.1	1.5	1.4	0.5
040	0.0	0.9	1.3	1.3	0.0
041	0.0	1.0	1.4	1.2	0.0
042	0.1	0.8	1.4	1.3	0.1
Sumatoria	0.4	8.7	12.8	10.3	0.7
Valores \bar{y}	0.05	0.9375	1.425	1.2875	0.085

Para cada curva medida se elaboró una tabla de los datos requeridos para el cálculo de las constantes a, b y c, que intervienen como incógnitas en el sistema de ecuaciones; además de los valores medios de "Y" por punto y la sumatoria de éstos, son necesarios los cálculos y las sumas algebraicas de X, X², X³, X⁴, XY, X²Y. Como ejemplo, a continuación se presentan los datos de la curva lumbar de la muestra de varones de 18 años.

Debe notarse que las sumatorias de X y X³ son cero; esto se previó desde el momento de asignar los valores al eje X, con lo que se abrevian los cálculos. Una vez que se realizaron los pasos ya descritos se llegó a establecer un sistema de ecuación al cual se describe en seguida.

TABLA DE DATOS REQUERIDOS PARA EL CALCULO DE LAS CONSTANTES a, b y c, PARA CADA CURVA MEDIDA

FUENTE	X	\bar{Y}	X^2	X^3	X^4	$X\bar{Y}$	$X^2\bar{Y}$
	+ 8	0.05	64	512	4096	0.4	3.2
	+ 4	0.9375	16	64	256	3.75	16.0
	0	1.425	0	0	0	0	0
	-4	1.2875	16	-64	256	-6.15	20.06
	-8	0.085	64	-512	4096	-0.68	5.44
Sumatoria	0	3.785	160	0	8704	-1.68	44.70

Curva lumbar masculina de 18 años.

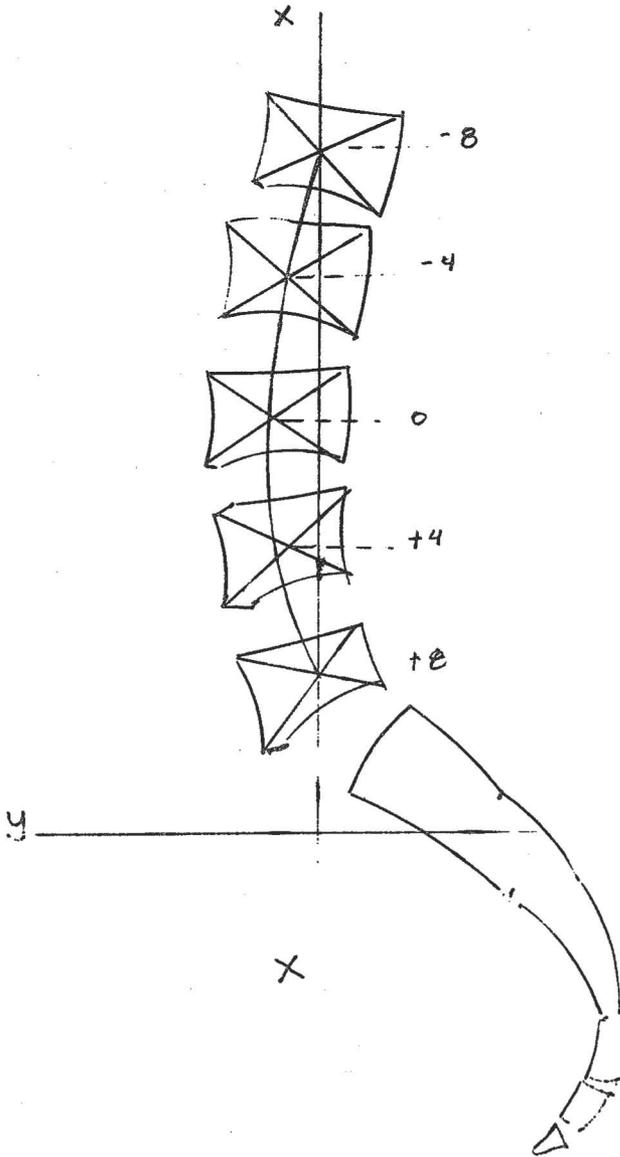
Estadística.

En la presente investigación de la columna vertebral, el uso de estadísticos como media, modo "Ji" cuadrada o "t" de Student presenta dificultades en su aplicación directa, pues el cálculo de cualquiera de ellos sobre la curva proporciona datos erróneos debido a que se ocultan datos, ya que cada punto en la curva representa una distribución de un conjunto de puntos.

En este trabajo, después de haber medido las alturas de Y sobre X en cada uno de los cinco puntos, se obtuvo un promedio Y de cada punto, de cada una de las curvas, por cada grupo de edad y de sexo.

A partir de estos promedios (Y) se realizan los cálculos matemáticos, los cuales originan una curva vertebral teórica por edad y sexo. A esta curva teórica matemática se le calcula el error estándar que indica el margen hasta el cual puede ser considerada dentro de los límites del promedio. En esta investigación es necesario comprobar la validez de las curvas teóricas con respecto a las reales, determinar si no son situaciones azarosas las que proporcionan las diferencias de los valores entre las curvas teóricas, y comprobar si los datos obtenidos se pueden considerar significativos o no.

Si se analiza la curva teórica, se observa que cada punto de esa curva reúne en un promedio de un variado número de individuos de la muestra; por otro lado, están las sumatorias de los cinco puntos de cada curva. Por lo tanto, en cada punto de la curva teórica se agrupa un conjunto de datos con un comportamiento particular y en las curvas generales se encuentra otro conjunto donde se incluyen los universos por punto, con distribuciones independientes.



Esquema IV muestra los trazos de los ejes X e Y en la región lumbar y la forma en que se midieron las alturas de Y a 8 y 4 cm del punto central 0. En este esquema el punto cero corresponde al centro de la 3a. vértebra lumbar y los puntos +8, +4, -8 y -4 a los centros de las otras vértebras, por lo que los puntos X=8 y X=-8 corresponden a Y=0.

Al trabajar con conjuntos de conjuntos, es necesario el uso de estadísticas diferentes a las usuales, ya que se debe estudiar la distribución de los datos en forma independiente y entre sus interacciones.

El análisis de la varianza o prueba F, llamada así en honor a Fisher, estudian la relación que existe entre dos o más muestras. El propósito de esta prueba es determinar si la variabilidad que existe entre dos o más muestras es mayor que la que existe dentro de cada muestra; de ser así, se puede concluir que hay diferencias entre las muestras.

El estudio de experimentos factoriales, como en este caso, donde intervienen los puntos, la edad y el sexo, así como las interacciones entre ellos, promete aislar la variabilidad de cada uno de ellos y determinar si hay diferencias significativas de acuerdo con el valor de F. Para ello, se compara la relación que existe entre la suma de cuadrados (SC) de los datos y los grados de libertad (GL) de la muestra investigada, es decir, de la variabilidad entre los grupos contra la variabilidad dentro del grupo; este último se denomina error experimental, presente en toda investigación científica.

Conclusiones

De los resultados que se obtuvieron de la curvatura del sacro, se puede concluir que:

- Existen diferencias entre la curvatura del sacro femenino y la del masculino, aunque estadísticamente resultaron *no* significativas para poder afirmar el diformismo sexual en esta curva. El sacro es un hueso muy utilizado para la diferenciación sexual. No es útil por el perfil de la curva sino por la relación de largo y ancho. Esta no significancia quizá se deba a que el sacro es un hueso compuesto por cinco elementos vertebrales soldados unos con otros desde temprana edad.
- De las mediciones directas y de ajuste se ve que la curva del sacro masculino tiene una tendencia a la forma simétrica, situación que no se manifestó en los sacros femeninos.
- La edad y el desarrollo de los jóvenes es un factor importante en la modificación de la curvatura, pues se observó principalmente en el grupo masculino que conforme va aumentando la edad, los sacros tienden más a la forma simétrica.

FORMULAS PARA LA CURVATURA LUMBAR

<i>Masculina</i>							
18 Años:	=	1.439	-	0.0105X	-	0.0213X ²	± 0.0893
19 Años:	=	1.6244	-	0.0054X	-	0.0237X ²	± 0.0451
20 Años:	=	1.782	-	0.0058X	-	0.0249X ²	± 0.0229
21 Años:	=	1.515	-	0.0152X	-	0.0198X ²	± 0.0112
<i>Femenina</i>							
18 Años:	=	1.498	-	0.0099X	-	0.0229X ²	± 0.0997
19 Años:	=	1.2937	-	0.0102X	-	0.0198X ²	± 0.0554
20 Años:	=	1.487	-	0.0107X	-	0.023X ²	± 0.071
21 Años:	=	1.444	-	0.0395X	-	0.022X ²	± 0.179

FORMULAS DE LA CURVATURA SACRA

<i>Masculina</i>							
18 Años:	=	3.9419	-	0.0601X	-	0.0664X ²	± 0.4978
19 Años:	=	3.292	-	0.0982X	-	0.05146X ²	± 0.3135
20 Años:	=	3.369	-	0.09847X	-	0.0540X ²	± 0.4643
21 Años:	=	3.8538	-	0.0497X	-	0.0612X ²	± 0.7578
<i>Femenina</i>							
18 Años:	=	3.532	-	0.0122X	-	0.0546X ²	± 0.325
19 Años:	=	3.122	-	0.07X	-	0.050X ²	± 0.22
20 Años:	=	3.525	-	0.0913X	-	0.0669X ²	± 0.82
21 Años:	=	3.615	-	0.0935X	-	0.056X ²	± 0.74

FORMULAS DE LAS CURVATURAS VERTEBRALES
SACRA, LUMBAR Y LUMBO-SACRA POR EDAD Y SEXO

$$= a + bx + cx^2$$

FORMULAS CURVATURA LUMBO-SACRA

<i>Masculina</i>							
18 Años:	=	3,27	+	0,0054X	-	0,0459X ²	± 0.1221
19 Años:	=	3,2882	+	0,0283X	-	0,04589X ²	± 0.416
20 Años:	=	3,275	+	0,0283X	-	0,047X ²	± 0.1383
21 Años:	=	3,563	+	0,0476X	-	0,044X ²	± 0.207
<i>Femenina</i>							
18 Años:	=	3,341	+	0,022X	-	0,049X ²	± 0.4727
19 Años:	=	2,967	+	0,021	-	0,0428X ²	± 0.12
20 Años:	=	3,104	+	0,0287X	-	0,0472X ²	± 0.12
21 Años:	=	3,41	+	0,02X	-	0,05X ²	± 0.192

TABLA DE VALORES DE Y MUESTRA MASCULINA

CURVA SACRA

<i>Edad X</i>	6	3	0	-3	-6
18	1.277	2.966	4.0	3.644	1.84
19	1.9583	2.316	3.2916	3.3416	1.92
20	1.008	2.475	3.35	3.316	1.833
21	1.411	3.03	3.88	3.549	1.60

CURVA LUMBAR

<i>Edad</i>	8	4	0	-4	-8
18	1.05	0.9375	1.425	1.2875	0.085
19	1.0916	1.150	1.640	1.3166	0.1166
20	1.1916	1.2416	1.833	1.4583	0.20
21	1.1555	1.266	2.038	1.482	0.45

CURVA LUMBO-SACRA

<i>Edad X</i>	8	4	0	-4	-8
18	0.662	2.81	3.78	1.6	0.1875
19	0.5583	2.59	3.633	2.058	0.258
20	0.50	2.6	3.758	1.95	0.2583
21	1.144	2.933	4.122	2.022	0.455

TABLA DE VALORES DE Y PARA LA MUESTRA FEMENINA

CURVA SACRA

<i>Edad</i>	6	3	0	-3	-6
17	0.6	2.275	3.225	3.375	1.975
18	0.9636	2.4636	3.4818	3.6118	2.227
19	0.99	2.30	3.05	3.15	1.62
20	0.68	2.42	3.53	3.42	1.55
21	1.13	2.58	3.59	3.66	1.99

CURVA LUMBAR

<i>Edad</i>	8	4	9	-4	-8
17	0.05	0.875	1.425	1.125	0.05
18	0.272	0.918	1.5454	1.2818	0.0434
19	0.02	0.77	1.13	1.16	0.03
20	0.01	0.89	1.50	1.32	0.01
21	0.02	0.88	1.45	1.29	0.02

CURVA LUMBO-SACRA

<i>Edad</i>	8	4	0	-4	-8
17	0.375	2.375	3.65	2.75	0.025
18	0.2636	2.49	3.70	1.8818	0.1272
19	0.33	2.41	3.21	1.83	0.20
20	0.22	2.48	3.59	1.57	0.10
21	0.33	2.38	4.01	2.0	0.12

**TABLA DE VALORES DE Y_t PARA
LA MUESTRA MASCULINA**

CURVA SACRA

<i>Edad</i>	6	3	0	-3	-6
18	1.1909	3.1638	3.9417	3.5244	1.9417
19	0.8502	2.5642	3.092	3.093	2.287
20	0.8343	2.5876	3.369	3.1784	2.0158
21	1.3534	2.6049	3.8548	3.4531	1.9498

CURVA LUMBAR

<i>Edad</i>	8	4	0	-4	-8
18	0.0082	1.0562	1.439	1.1402	0.1598
19	0.0644	1.2936	1.6244	1.2668	0.1508
20	0.142	1.3604	1.7820	1.4068	0.2348
21	0.1262	1.1374	1.515	1.259	0.3694

CURVA LUMBO-SACRA

<i>Edad</i>	8	4	0	-4	-8
18	0.3776	2.5572	3.270	2.514	0.2882
19	0.585	2.6694	3.2882	2.4414	0.1290
20	0.4934	2.6362	3.2750	2.4098	0.0406
21	1.1278	3.0494	3.560	2.6686	0.3662

**TABLA DE VALORES DE Y_t PARA
LA MUESTRA FEMENINA**

CURVA SACRA

<i>Edad</i>	6	3	0	-3	-6
17	0.454	2.377	3.286	3.151	1.972
18	1.4932	3.004	3.532	3.077	1.639
19	0.902	2.462	3.122	2.882	1.742
20	0.5688	2.649	3.525	3.1968	1.644
21	1.038	2.8305	3.615	3.3615	2.160

CURVA LUMBAR

<i>Edad</i>	8	4	0	-4	-8
17	-0.8011	0.2585	0.6365	0.3329	0.6523
18	0.0468	1.092	1.498	1.1712	0.1116
19	0.0551	0.9331	1.293	1.0147	0.1087
20	-0.0706	1.0762	1.487	1.1618	0.1006
21	-0.2928	0.9308	1.444	1.2468	0.3392

CURVA LUMBO-SACRA

<i>Edad</i>	8	4	0	-4	-8
17	0.3722	2.5574	3.2450	2.4350	0.1254
18	0.381	2.645	3.341	2.4669	0.029
19	0.3958	2.3662	2.9670	2.1982	0.0598
20	0.3128	2.4636	3.1040	2.2334	-0.1464
21	0.3700	2.69	3.41	2.53	0.05

**TABLA COMPARATIVA DE LOS VALORES
DE Y_t EN GRUPOS DE EDAD Y SEXO**

CURVA SACRA MASCULINA

<i>X</i>	<i>Edad</i>	18	19	20	21
+	6	1.1909	0.8502	0.8342	1.3534
+	3	3.1638	2.5642	2.5876	2.6049
	0	3.9417	3.292	3.369	3.8548
-	3	3.5244	3.093	3.1784	3.4531
-	6	1.9417	2.287	2.0158	1.9498

CURVA SACRA FEMENINA

<i>X</i>	<i>Edad</i>	18	19	20	21
+	6	1.4932	0.902	0.5688	1.038
+	3	3.004	2.462	2.649	2.8305
	0	3.532	3.122	3.525	3.615
-	3	3.077	2.882	3.1968	3.3615
-	6	1.639	1.742	1.6644	2.160

CURVA LUMBAR MASCULINA

<i>X</i>	<i>Edad</i>	18	19	20	21
+	8	0.0082	0.0644	0.142	0.1262
+	4	1.0562	1.2236	1.3604	1.1374
	0	1.439	1.6244	1.7820	1.515
-	4	1.1402	1.2668	1.4068	1.259
-	8	0.1598	0.1508	0.2348	0.3694

CURVA LUMBAR FEMENINA

<i>X</i>	<i>Edad</i>	18	19	20	21
+	8	0.0468	0.0551	-0.0706	-0.2928
+	4	1.092	0.9331	1.0762	0.9308
	0	1.498	1.293	1.487	1.444
-	4	1.1712	1.0147	1.1618	1.2468
-	8	0.1116	0.1087	0.1006	0.3392

CURVA LUMBO-SACRA MASCULINA

<i>X</i> Edad	18	19	20	21
+ 8	0.3776	0.585	0.4934	1.1278
+ 4	2.5572	2.6694	2.6362	3.0494
0	3.270	3.2882	3.2750	3.563
- 4	2.514	2.4414	2.4098	2.6686
- 8	0.2892	0.1290	0.0406	0.3662

CURVA LUMBO-SACRA FEMENINA

<i>X</i> Edad	18	19	20	21
+ 8	0.381	0.3958	0.3128	0.37
+ 4	2.645	2.3662	2.4636	2.69
0	3.341	2.9670	3.1040	3.41
- 4	2.469	2.1982	2.2334	2.53
- 8	0.029	0.0598	0.1464	0.05

**TABLA COMPARATIVA DE LOS VALORES DE LAS
CONSTANTES POR PESO, SEXO Y EDAD**

CONSTANTE a

<i>Edad</i>	<i>Curva Sacra</i>		<i>Curva Lumbar</i>		<i>Curva Lumbo-Sacra</i>	
	<i>Masculina</i>	<i>Femenina</i>	<i>Masculina</i>	<i>Femenina</i>	<i>Masculina</i>	<i>Femenina</i>
17	---	3.286	---	0.6365	---	3.245
18	1.9417	3.523	1.439	1.498	3.27	3.341
19	1.292	3.122	1.6244	1.2937	3.2882	2.967
20	1.369	3.525	1.782	1.487	3.275	3.104
21	1.8548	3.615	1.515	1.444	3.593	3.410

CONSTANTE b

<i>Edad</i>	<i>Curva Sacra</i>		<i>Curva Lumbar</i>		<i>Curva Lumbo-Sacra</i>	
	<i>Masculina</i>	<i>Femenina</i>	<i>Masculina</i>	<i>Femenina</i>	<i>Masculina</i>	<i>Femenina</i>
17	---	0.129	---	0.0093	---	0.0153
18	0.0601	0.0122	0.0105	0.0099	0.0054	0.0220
19	0.0982	0.070	0.0054	0.0102	0.0283	0.0210
20	0.0984	0.0913	0.0058	0.0107	0.0283	0.0287
21	0.0497	0.0935	0.0152	0.0395	0.0476	0.0200

CONSTANTE c

<i>Edad</i>	<i>Curva Sacra</i>		<i>Curva Lumbar</i>		<i>Curva Lumbo-Sacra</i>	
	<i>Masculina</i>	<i>Femenina</i>	<i>Masculina</i>	<i>Femenina</i>	<i>Masculina</i>	<i>Femenina</i>
17	---	0.058	---	0.0213	---	0.0468
18	0.0664	0.0546	0.0213	0.0229	0.0459	0.0490
19	0.05146	0.0500	0.0237	0.0198	0.04589	0.0428
20	0.05400	0.0669	0.0249	0.0230	0.04700	0.0472
21	0.06120	0.0560	0.0198	0.0222	0.04400	0.0500

- La tendencia a la simetría o asimetría, ocasionada por las modificaciones en las últimas vértebras del sacro, ya que las primeras vértebras son inamovibles incluso con la edad.

Existe una relación inversa entre la longitud del sacro y su curvatura; es decir, entre más largo se haga el sacro disminuye su curvatura y viceversa, pues los elementos óseos que intervienen en la amplitud del sacro son principalmente, las vértebras finales que modifican la curvatura con el avance de la edad.

Por lo que respecta a la curvatura de la región lumbar:

- Principalmente la conforman los discos intervertebrales con forma de cuña, más que los elementos óseos cilindroides, por lo que para conocer la configuración de la curva es conveniente hacer las mediciones en seres vivos.
- Se puede llamar curva “perfecta” a aquella que es completamente simétrica, donde sus puntos extremos se asientan en el eje X; aplicando el método y el punto apical de la curva se localiza en el centro de la tercera vértebra lumbar.
- De los datos que se obtuvieron del estudio, se observó que la edad afecta la simetría de la curvatura lumbar, pues conforme va avanzando la edad la curvatura se desproporciona; importante interrogante es determinar qué situaciones biológico-sociales coadyuvan a esta modificación de la curva lumbar.
- Se concluyó que la curva masculina es de menor profundidad que la curvatura femenina, lo que señala el diformismo sexual.
- También se ve que a diferencia de las curvas masculinas, la curva lumbar femenina no tiende a hacerse más profunda con la edad, situación que hace pensar en la adaptación que la mujer tiene ante la posibilidad de la maternidad, pues entre menor es la curvatura, mayor es la resistencia a presiones y peso.
- Las modificaciones de la curvatura lumbar, son más notorias en la cuarta y quinta vértebra, de lo que se piensa que es la distribución de la carga visceral y el aumento de presión y peso del organismo que recae en la parte baja de la espina dorsal con el aumento de edad.
- La curvatura lumbo-sacra configurada por los tres últimos elementos óseos de la columna libre y los primeros solidificados del sacro, observa que sus principales modificaciones recaen en el punto apical de esta curvatura; y son las vértebras libres las principales que intervienen en la alteración de la curvatura lumbo-sacra.

Estas modificaciones se presentan con el avance de la edad en ambos sexos, aunque es en la curva masculina más notoria la alteración.

REFERENCIAS

ALLBROOK, D.

s/f *Changes in lumbar vertebral body height with age.* AJPA, vol. 14:35-39.

AYRES, F.

1965 *Modern Algebra Schaum's outline of*, McGraw Hill, New York, USA.

BEAWPERE G. y L. Charriere

1964 *Le Scoliosis*, Expansion Scientifique Française, Paris, France.

BONE, A.

1973 *The origin of chordates reading in genetics*, Oxford, Biology Readings Ed. Head and Lowestein Evolution England.

CAILLIET, René

1977 *Escoliosis. Diagnóstico y atención de los pacientes*, Ed. Manual Moderno, México.

CARLO y Valenzuela

1979 "Antropometría y maduración de escolares de una área de Santiago de Chile", *Boletín de la Oficina Sanitaria Panamericana*, vol. XXXVII, no. 2, año 58:113-131, Washington, D.C., USA.

CHRISTENSON, P.

1977 "The radiological study of the normal spine cervical, thoracic, lumbar, and sacral", *The radiological clinics of North America, Symposium of the spine*, Austin R. Sandrock, M.Q., vol. 15, no. 2, Philadelphia, USA.

COLCIANI, M. y Berman

1974 *Algebra Moderna y Trigonometría*, Ged Publicaciones Cultural, México.

COMAS, Juan

- 1960 *Manual de Antropología Física*, Instituto de Investigaciones Antropológicas, División de Antropología, UNAM, México.
- 1966 *El hombre como especie política y polimórfica*, UNAM, México.

CUSHWAY, B.C. y J.M. Hier

- 1929 *Routine examinations of the spine for industrial employed*, JMMA 92:701, USA.

DAVID, P.R.

- 1960 *Observations on vertebral in different race*, Congres International. Sciences Anthropologiques et ethnologiques, vol. 5:443-453, Paris, France.

EPSTEIN, Bernord

- 1976 *The spine radiological test and atlas*, Med. Lear febiger, Philadelphia, USA.

EPSTEIN, B. y J. Epstein

- 1977 "Cervical spinal stenosis", *The radiological clinics of North America, Symposium of the spine*, Austin R. Sandrock M.Q., vol. 15, no. 2:226-240, WB Saunders Cy, Philadelphia, USA.

JAEN, M.T.

- 1974 "Variedades anatómicas en vértebras de la colección Tlatelolco", *Anales INAH*:71-82, México.

KURTH, G.

- 1931 *The evaluation of human pelvis in relation to the machanesa, the erect posture*, Ed. Reynolds Edwards, USA.

LANIER, R.

- 1939 *The presacral vertebrae of american withe and negro males*, AGPA, vol. 25, no. 3:341-420.

LE GROS, Clark W.

- s/f *Historia de los primates. Una introducción al estudio del hombre fósil*, Cuaderno 85, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

LEHMANN, Ch.

- 1981 *Geometría Analítica*, Ed. Limusa, México.

MONTEMAYOR, F.

- 1973 *Fórmulas estadísticas para investigadores*, Colección Científica, no. 5, INAH, México.

NAPIER, J.

- 1967 *The antiquity of Human Walking. Human variations and origins. An introduction to human biology and evolution*, W.H. Freeman and Cy, San Francisco and London.

NATHAN, H.

- 1959 *The para articular processes of the thoracic vertebral*, Anatomical Record, vol. 133, no. 4, april, USA.
- 1960 "Ackalaj and Aviad", *Spondylolysis in the aged Geriatrics*, Lacet Publication in Jerusalem, vol. 15:187-196, march, Israel, 1960.
- 1962 *Osteophytes of the vertebral column. An Anatomical study of their development according to age, race and sex. Considerations as to their etiology and significance*, J. Bone and Joint Surg, 44:243-268.
- 1962 *Inverted pattern of development of thoracic vertebral osteophytosis in situ. Inversus and in other instances of right descuding Aorta*, Radio clinics no. 31:150-158, USA.

PIOJAN, Ma.C.

- s/f *Atlas y Sacro. Diferenciación sexual*, inédito.

RICH, B.

- s/f *Geometría Plana con Coordenadas*, McGrow Hill, México.

ROBERTS, T.

- 1978 *Neurophysiology of postural mechanisms*, Butter Worths and Co., 432 p., Boston, USA.

SCHULTZ, A.

- 1931 *The relative thickness of long bones and the vertebral primates*, AJPA, vol. II, no. 3:363-371.

THLEME, F.B.

- 1950 *Lumbar breakdown caused by erect posture in man with emphasis on spondylolisis these and heaneated invertebral disc*. Anthropological papers, Museum of Anthropology, University of Michigan, paper 4, 195.

TESTUT, L.

1961 *Tratado de Anatomía Humana*, Salvat Ed., vol. I, México.

VALLOIS, H.

1952 *Les hommes fossiles*, Masson et Cie Editores, Paris, France: 70-75.

WILOUGHBY, S.

1981 *Probabilidad y Estadística*, 9a. ed., Publicaciones Cultura, México.

WINGATE, T. y S. IDELL

1928 *A Quantitative study of the vertebral column by direct and roetgenoscopic methods*, AJPA, vol. XII, no. 2.

