ARITMÉTICA DEL *TONALPOHUALLI* Y DEL *XIUHPOHUALLI**

EDUARDO PIÑA GARZA

En este trabajo se consideran algunas propiedades aritméticas que se encuentran en el ciclo calendárico de 260 días, llamado comúnmente *tonalpohualli*, usado por los antiguos mexicanos, y por semejanza con esas propiedades se encuentran también conclusiones parecidas en la cuenta de los años. Algunas repeticiones de hechos descubiertos por otros autores han sido necesarias, pero se dan las referencias más importantes. Creemos que son originales varios de los algoritmos aquí presentados y también algunos de los comentarios.

Llamaremos *tonalámatl*, como es costumbre, a la representación del *tonalpohualli* en los códices y libros.

Agrupamos con el nombre de *xiuhpohualli* la cuenta de los años formados por 365 días.

Las afirmaciones de este trabajo se adaptan a las costumbres de los mexicas poco antes de la Conquista. Por supuesto que la mayor parte de estas consideraciones se extienden a los calendarios usados por otros pueblos u otras épocas de la región mesoamericana, lo cual se debe a sus múltiples analogías.

1. Algoritmos del *tonalpohualli*

Nos referimos primero al *tonalpohualli* o ciclo calendárico de 260 días, el cual fue numerado por nuestros antepasados con ayuda de dos componentes, un entero y un símbolo. El entero se elige de 13 enteros del 1 al 13, representados en ocasiones por círculos; y el símbolo de 20 símbolos o jeroglifos ordenados. Las dos componentes recorren cíclicamente los trece enteros y los veinte símbolos. Las parejas así formadas son 260 diferentes, que después se repiten cíclicamente, en conjuntos periódicos de 260 días.

* Agradezco al Maestro Rafael Tena, del Departamento de Etnohistoria del INAH, la lectura cuidadosa de la versión original de este trabajo; lo cual mejoró su contenido con ayuda de sus conocimientos, y disminuyó los errores del mismo.

Los conjuntos de 260 días se encuentran en muchos códices, formando tiras de 5×52 cuadretes, como por ejemplo en los códices *Borgia* [1], *Cospi* [2], *Vaticano B* [3], o 20 páginas de trecenas, como en los códices *Borbónico* y *Vaticano A* [4] y en el *Borgia*.

Los primeros misioneros incluyeron ese calendario ritual en sus crónicas, se encuentra por ejemplo en Motolinía [5], Sahagún [6] y Durán [7]. Pero también se encuentran en monumentos de piedra como el llamado Calendario Azteca o Piedra del Sol, en uno de sus círculos cercano al centro, donde los 20 símbolos están ordenados en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, como lo hizo notar de León y Gama [8] cuando se descubrió esta piedra a finales del siglo XVIII.

A continuación transcribimos la lista de los nombres de estos 20 símbolos con sus nombres en náhuatl. La ortografía y la traducción las tomo de Rafael Tena [9].

1. *cipactli*	(caimán)
2. *ehécatl*	(viento)
3. *calli*	(casa)
4. *cuetzpalin*	(lagartija)
5. *cóhuatl*	(serpiente)
6. *miquiztli*	(muerte)
7. *mázatl*	(ciervo)
8. *tochtli*	(conejo)
9. *atl*	(agua)
10. *itzcuintli*	(perro)
11. *ozomatli*	(mono)
12. *malinalli*	(hierba torcida)
13. *ácatl*	(caña)
14. *océlotl*	(jaguar)
15. *cuauhtli*	(águila)
16. *cozcacuauhtli*	(buitre)
17. *olin*	(movimiento)
18. *técpatl*	(pedernal)
19. *quiáhuitl*	(lluvia)
20. *xóchitl*	(flor)

En lo que sigue usaremos el número de lugar en esta tabla para representar en forma compacta a cualquiera de estos símbolos.

Dado un número entero X entre 1 y 260, el número n del 1 al 13 se encuentra por el residuo de dividir X entre 13

$$\frac{X}{13} = a + \frac{n}{13}, \tag{1}$$

donde a es un entero. Excepto cuando el residuo es cero, entonces $n = 13$.

Y el número α del 1 al 20, que corresponde al símbolo se encuentra por el residuo de dividir X entre 20

$$\frac{X}{20} = b + \frac{\alpha}{20}, \tag{2}$$

donde b es un entero. Excepto cuando el residuo es cero, entonces $\alpha = 20$.

Así al número entero X se le hace corresponder el número n y el símbolo asociado al número α.

Usaremos el símbolo $X = (n\ ,\ \alpha)$. Con a el nombre del símbolo o su número correspondiente en la tabla.

Por ejemplo:

Si $X = 152$, $\alpha = 11$, $n = 9$, $b = 7$, $\alpha = 12$.

Entonces $152 = (9,\ 12) = (9,$ *malinalli*$)$.

Aprendido este algoritmo se observa que es muy sencillo asociar a un número X, el número n y el símbolo que le corresponde.

El problema inverso, dados el número y símbolo de un día del *tonalpohualli*, encontrar el número correspondiente X del 1 al 260, es un problema resuelto por el teorema chino del residuo, conocido en matemáticas.

Nosotros usaremos otro método que resulta del estudio que sigue.

El *tonalpohualli* tiene 20 trecenas, y cada una de ellas principia por un símbolo diferente. Si los colocamos en el orden en que aparecen obtenemos la tabla

1ª	trecena principia con	1	*cipactli*
2ª	trecena principia con	14	*océlotl*
3ª	trecena principia con	7	*mázatl*
4ª	trecena principia con	20	*xóchitl*
5ª	trecena principia con	13	*ácatl*
6ª	trecena principia con	6	*miquiztli*
7ª	trecena principia con	19	*quiáhuitl*
8ª	trecena principia con	12	*malinalli*
9ª	trecena principia con	5	*cóhuatl*
10ª	trecena principia con	18	*técpatl*
11ª	trecena principia con	11	*ozomatli*
12ª	trecena principia con	4	*cuetzpalin*

13ª	trecena principia con	17	*olin*
14ª	trecena principia con	10	*itzcuintli*
15ª	trecena principia con	3	*calli*
16ª	trecena principia con	16	*cozcacuauhtli*
17ª	trecena principia con	9	*atl*
18ª	trecena principia con	2	*ehécatl*
19ª	trecena principia con	15	*cuauhtli*
20ª	trecena principia con	8	*tochtli*

Los 20 símbolos están ahora ordenados en otra forma, permutados de orden según la receta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 14 & 7 & 20 & 13 & 6 & 19 & 12 & 5 & 18 & 11 & 4 & 17 & 10 & 3 & 16 & 9 & 2 & 15 & 8 \end{pmatrix} \tag{3}$$

que es una de las formas que se usan en matemáticas para representar permutaciones.

Observamos que los números de la fila inferior tienen un orden. El siguiente a su derecha tiene 7 unidades menos en los casos en que la resta es un número positivo. Cuando la diferencia no es un número positivo, entonces se deberá sumar 20 a dicho resultado no positivo.

Si t es el lugar de la trecena y a el número del símbolo correspondiente, entonces se tiene la congruencia

$$\alpha \equiv 8 - 7 \times t \pmod{20}. \tag{4}$$

Es decir, calculamos $8 - 7 \times t$ y le sumamos 20 hasta obtener un número positivo.

Por ejemplo calculamos el símbolo con el cual principia la trecena sexta ($t = 6$). Se calcula $8 - 7 \times 6 = -34$; sumamos dos veces 20 y obtenemos $a = 6$ (*miquiztli*).

Otro ejemplo es la trecena 14ª ($t = 14$). Calculamos $8 - 7 \times 14 = -90$ y le sumamos 5 veces 20 hasta obtener $\alpha = 10$ (*itzcuintli*).

El problema inverso sería: dado un símbolo decir cuál trecena principia con él.

Se trata ahora de la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 & 20 & 17 & 14 & 11 & 8 & 5 & 2 & 19 & 16 & 13 & 10 & 7 & 4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

que se obtiene poniendo arriba, ordenados, los números del 1 al 20 que estaban abajo en la permutación (3), y abajo el número correspondiente, que antes estaba arriba.

Nótese ahora que los números en la fila de abajo están también ordenados. El número a su derecha disminuye por 3, excepto cuando no es positivo, en cuyo caso se debe sumar 20 al resultado no positivo. O también

$$t \equiv 4 - 3\,\alpha \pmod{20}. \tag{6}$$

Por ejemplo la trecena que principia con el símbolo *tochtli* cuyo número $a = 8$, calculamos $4 - 3 \times 8 = -20$, y sumamos 20 dos veces para obtener $t = 20$; la última trecena.

Otro ejemplo es el símbolo *quiáhuitl*, cuyo número $a = 19$; calculamos $4 - 3 \times 19 = -53$, y sumamos tres veces 20 para obtener $t = 7$, la séptima trecena.

La permutación (5) se puede también representar por ciclos en la forma

$$(14,\ 2,\ 18,\ 10)\,(7,\ 3,\ 15,\ 19)\,(20,\ 4,\ 12,\ 8)\,(13,\ 5,\ 9,\ 17)\,(1)\,(6)\,(11)\,(16). \tag{7}$$

Los cuatro números 14, 2, 18 10, del primer paréntesis representan que 14 se transforma en 2, el 2 en 18, el 18 en 10, y el 10 en 14; formando un ciclo de cuatro símbolos. Lo mismo se puede decir de los otros tres conjuntos de cuatro números entre paréntesis. Los paréntesis que encierran un solo número representan que el lugar 1 se transforma en 1, el 6 en 6, el 11 en 11, y el 16 en 16.

Es interesante observar que L. Séjourné [10] asocia los dioses correspondientes a los símbolos que acompañan esta permutación. La asociación de Séjourné es en parejas, como se haría si se toma sólo la primera forma de representar las permutaciones. Hemos visto que esta otra forma (7) de considerar las permutaciones nos lleva, si seguimos las ideas de Séjourné, a tomar en cuenta grupos de cuatro dioses asociados a los símbolos de un ciclo de cuatro; o también a descubrir dioses sin pareja.

Las permutaciones en matemáticas se representan también por medio de matrices; en este caso nosotros usamos las congruencias (4) y (6) que requieren un esfuerzo mucho menor. En la literatura de matemáticas no es muy frecuente representar permutaciones por medio de congruencias, como se hace en este trabajo. Lo cual se debe investigar.

Podemos ahora regresar al problema de determinar el número X que corresponde al número n y al símbolo en el lugar α.

El primer número ($n = 1$) de su trecena tiene como símbolo el lugar ($\alpha - \mathrm{n} + 1$), por lo cual se puede calcular, como hicimos previamente, a qué trecena corresponde, y de ahí de qué número X se trata. La fórmula es entonces

$$X \times \; 13 \times [3\,(n - \alpha)\ (\mathrm{mod}\ 20)] + n. \tag{8}$$

Por ejemplo, el número 10 *tochtli*, con $n = 10$ y $\alpha = 8$; calculo $3\ (\mathrm{n} - \alpha)$ $(\mathrm{mod}\ 20) \equiv 3 \times (10 - 8)\ (\mathrm{mod}\ 20) = 6$ y $X = 13 \times 6 + 10 = 88$.

Otro ejemplo es 4 *ozomatli*, que tiene $n = 4$ y $\alpha = 11$; calculo $3\ (n - \alpha)$ $(\mathrm{mod}\ 20) \equiv -21\ (\mathrm{mod}\ 20) = 19$ y $X = 13 \times 19 + 4 = 251$.

Para un matemático, el aceptar este algoritmo indica la existencia de otro similar que resulta de la simetría en el papel que juegan los números 13 y 20 en la cuenta del *tonalpohualli*. Pero además este otro algoritmo se encuentra implícito en las páginas 53 y 54 del códice *Borgia*, en donde se representan cinco (1, 5, 9, 13, 17; que corresponden a *cipactli*, *cóhuatl*, *atl*, *ácatl*, *olin*) de los 20 símbolos, con el orden sucesivo de 13 números que aparecen en el *tonalpohualli*. Por ejemplo para el quinto símbolo *cóhuatl* aparecen: 5 *cóhuatl*, 12 *cóhuatl*, 6 *cóhuatl*, 13 *cóhuatl*, 7 *cóhuatl*, 1 *cóhuatl*, 8 *cóhuatl*, 2 *cóhuatl*, 9 *cóhuatl*, 3 *cóhuatl*, 10 *cóhuatl*, 4 *cóhuatl* y 11 *cóhuatl*. Estos números ocupan en el *tonalpohualli* los lugares (de 20 en 20): 5, 25, 45, 65, 85, 105, 125, 145, 165, 185, 205, 225 y 245, respectivamente. Conviene asociar el número de veintenas que caben en estos números, y obtener la permutación resultante de asociar ese número (al cual se suma 1), con la posición. Se encuentra así la permutación de 13 números

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 12 & 6 & 13 & 7 & 1 & 8 & 2 & 9 & 3 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \tag{9}$$

pero esta permutación tiene un orden muy simple si notamos que el número siguiente de cualquier número de la fila inferior se encuentra dos posiciones a la derecha. Excepto el 13, que tiene el 1 dos posiciones a su derecha; y los últimos a la derecha, que tienen sus siguientes como primeros de la izquierda; para cerrar los ciclos de forma perfecta.

Se encuentra de esta forma el otro algoritmo semejante a (8)

$$X \equiv 20 \times \; [2\,(n - \alpha)\ (\mathrm{mod}\ \ 13)] + \alpha. \tag{10}$$

Por ejemplo, el número 10 *tochtli*, ejemplo previo, con $n = 10$ y $a = 8$; calculo $2\ (n - \alpha)\ (\mathrm{mod}\ 13) \equiv 2 \times (10 - 8)\ (\mathrm{mod}\ 13) = 4$ y se encuentra de nuevo $X = 20 \times 4 + 8 = 88$.

2. *El caso de la huella de pie perdida*

En algunos *tonalámatl* (códices *Borgia* [1] y *Cospi* [2]) se encuentra para 32 días la figura de una huella dentro del cuadrete donde se representa un día por su número *n* y su símbolo. Cuando se estudia la frecuencia de ocurrencia de estas huellas de pie en los *tonalámatl* se hallan cada 9 o cada 7 días, formando conjuntos de 9×9 y 7×7 que se ajustan a la igualdad

$$260 = 9 \times 9 + 7 \times 7 + 9 \times 9 + 7 \times 7 = 81 + 49 + 81 + 49. \qquad (11)$$

Este hecho fue despreciado en algunos estudios previos del códice *Borgia*. Dos de los expertos que han reproducido el *tonalámatl* de este códice [10] y [11], suprimen la última huella de la serie en el cuadrete 10 *olin*. Esta omisión no es importante para esos autores porque no comentan la presencia de las huellas. Y claramente la omisión de Séjourné proviene de copiar el descuido de Seler.

En tiempos recientes han aparecido ediciones facsimilares y comentarios a los códices *Borgia* y *Cospi*, y en el comentario al códice *Borgia* [12] tampoco se mencionan las huellas; pero en el comentario al códice *Cospi* [13] se indica que ocurren en la misma posición en ambos códices y se descubre también que corresponden a la serie $9 \times 9 + 7 \times 7 + 9 \times 9 + 7 \times 7$ arriba mencionada.

No se conoce en todos los casos el significado de estas huellas, que en algunos códices que representan peregrinaciones marcan la ruta. Y en los mapas indican los caminos. Pero se encuentra también una huella de pie sobre la falda de *Miquiztli* y otra huella sobre el rostro de *Tlazoltéotl* en las láminas 5 y 47 del Códice *Borgia*, respectivamente, y en muchos otros lugares de los códices.

Un hecho importante resulta de la posición de estas huellas. El último de los intervalos de 7 días no termina con el primer día del *tonalámatl*, sino con el cuarto. Este último intervalo de 7 días se completa sólo si se conectan el fin con el principio del *tonalpohualli*. Este hecho demuestra que estos *tonalpohualli* se usaron uno después del otro en forma periódica. Solo de esta forma se contempla la sucesión perfecta de cuadrados. A la misma conclusión se ha llegado por otros razonamientos como veremos en seguida.

3. Los algoritmos del *xiupohualli*

Además del ciclo calendárico, se usaba un calendario solar de 365 días, los cuales se formaban con 18 meses de 20 días, más 5 días llamados *nemontemi*.

Los años solares tenían el nombre de un día del *tonalpohualli*, que se formaba con los 13 enteros ya mencionados, pero con sólo 4 símbolos, que entre los mexicas fueron *calli*, *tochtli*, *ácatl*, *técpatl*. Los años se numeraban del 1 al 52 con ayuda de la combinación de los trece números y de esos cuatro símbolos que se recorrían cíclica y periódicamente. De nuevo encontramos estos hechos en los códices (ver por ejemplo el códice *Borbónico* [4]), y se ilustran también por los cronistas que usaron ruedas calendáricas para representar el siglo de 52 años. (Ver por ejemplo Motolinía [5], Sahagún [6] y Durán [7]).

Alfonso Caso hizo notar [14] que si se da una pareja de número y símbolo tomados del *tonalpohualli* para todos los días del año solar, entonces la diferencia entre la pareja de un día del año con la pareja del mismo día del año siguiente tiene el número n incrementado por uno, pero el a del símbolo incrementado por 5. El primer efecto es consecuencia de que el residuo de dividir 365 por 13 es 1; el segundo efecto es producido por los 5 *nemontemi*, porque 5 es el residuo de dividir 365 por 20. Con las ideas de Caso la diferencia de días entre los nombres de dos años consecutivos es 365. Esto es otra justificación para asegurar que los 365 días del año se contaban con los 260 días del *tonalpohualli*, los cuales se repetían periódicamente como nuestros 7 días de la semana.

Rafael Tena [9] justifica con ayuda de muchas fuentes que los días que le dan su nombre al año ocupan los lugares 80 y 340 del calendario solar.

En el caso de los años también asociamos un número β, ahora de 1 a 4, para los cuatro símbolos que ordenan los años.

1. *tochtli* (conejo)
2. *ácatl* (caña)
3. *técpatl* (pedernal)
4. *calli* (casa)

Los números de estos símbolos estaban separados cada cinco números en la primera tabla del *tonalpohualli*, donde sus números a eran 8, 13, 18, 3.

Las semejanzas del *xiupohualli* con el *tonalpohualli* permiten encontrar con facilidad los algoritmos para encontrar estos números.

Dado X cualquier entero entre 1 y 52, el número m entre 1 y 13, es el residuo de dividir entre 13

$$\frac{X}{13} = a + \frac{m}{13} . \qquad (12)$$

Excepto cuando el residuo es cero, en que $m = 13$.

El entero β entre 1 y 4 es el residuo de dividir X entre 4

$$\frac{X}{4} = a + \frac{\beta}{4} . \qquad (13)$$

Excepto cuando el residuo es cero, en cuyo caso $\beta = 4$.

Como ejemplo busco el año con lugar $X = 37$. 11 es el residuo de dividir 37 entre 13 y 1 es el residuo de dividir 37 entre 4. Por lo cual el año en el lugar 37 es 11 *tochtli*.

El problema inverso tiene una solución con ayuda de congruencias

$$X \equiv 13\,[(\beta - m)\ (\mathrm{mod}\ 4)] + m . \qquad (14)$$

Como ejemplo tomo el año 9 *técpatl*, $m = 9$ y $\beta = 3$. Calculo $\beta - m = -6$ y sumo 2 veces 4, hasta obtener el número no negativo 2. Por lo cual $X = 13 \times 2 + 9 = 35$.

REFERENCIAS

[1] *Códice Borgia*
Sociedad Estatal Quinto Centenario, España; Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Austria; México, Fondo de Cultura Económica, 1993.

[2] *Códice Cospi*
Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Austria; México, Fondo de Cultura Económica, 1994.

[3] *Códice Vaticano B* 3773
Sociedad Estatal Quinto Centenario, España; Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Austria; México, Fondo de Cultura Económica, 1993.

[4] *Códice Borbónico*
Sociedad Estatal Quinto Centenario, España; Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Austria; México, Fondo de Cultura Económica, 1991.

Códice Vaticano A 3738
Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Austria; México, Fondo de Cultura Económica, 1996.

[5] Fray Toribio de Benavente Motolinía
Memoriales (c. 1527-1541) p.162 y portada. Edición de Nancy Joe Dyer, México, El Colegio de México, 1996.

[6] Fray Bernardino de Sahagún
Historia General de las Cosas de Nueva España (c. 1575). México, Editorial Porrúa, 1984, libro IV y apéndice.

[7] Fray Diego Durán
Historia de las Indias de Nueva España e Islas de Tierra Firme (c. 1579), México, Editorial Porrúa, 1984, v. I, p. 229-230 y lámina 34.

[8] Antonio de León y Gama
Descripción Histórica y Cronológica de las dos Piedras (1792), México, Manuel Porrúa, 1978.

[9] Rafael Tena
El calendario mexica y la cronografía, México, Instituto Nacional de Antropología e Historia, 1987 y comunicación personal, 1998.

[10] Laurette Séjourné
El pensamiento náhuatl cifrado por los calendarios, México, Siglo Veintiuno, 1981.

[11] *Códice Borgia*
Edición de Eduard Georg Seler, México, Fondo de Cultura Económica, 1963.

[12] Ferdinand Anders, Maarten Jansen y Luis Reyes García
Los templos del cielo y de la oscuridad. Oráculos y liturgia. Libro explicativo del llamado Códice Borgia, Sociedad Estatal Quinto Centenario, España; Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Austria; México, Fondo de Cultura Económica, 1993.

[13] Ferdinand Anders, Maarten Jansen y Peter Van der Loo
Calendario de pronósticos y ofrendas. Libro explicativo del llamado Códice Cospi, Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Austria; México, Fondo de Cultura Económica, 1994.

[14] Alfonso Caso
Los calendarios prehispánicos, México, Universidad Nacional Autónoma de México, 1967.