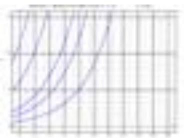
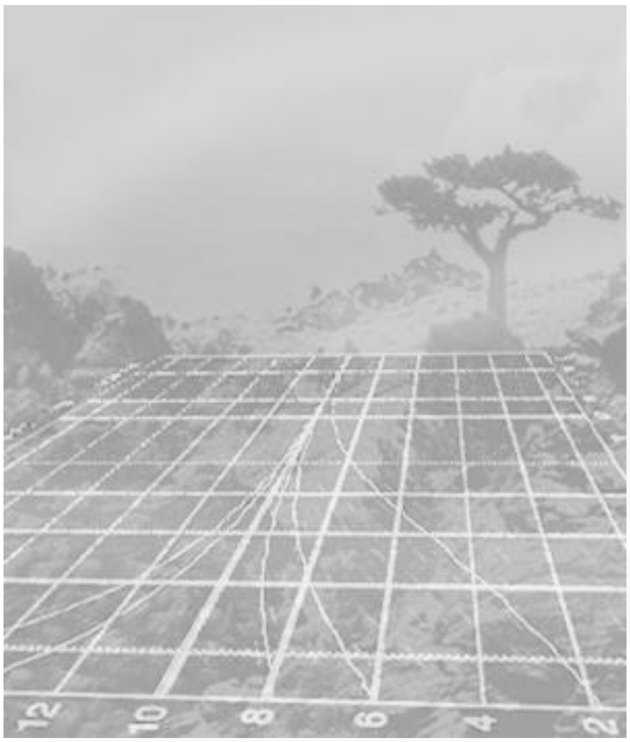
Dimensión económica, Instituto de Investigaciones Económicas, UNAM
Revista digital arbitrada
Vol. 2, núm. 6, mayo-agosto 2011
http://rde.iiec.unam.mx/revistas/6/articulos/3/31.php



# La explotación intensiva y extensiva de la naturaleza. Ideas sobre su posible modelación matemática

**Arturo Bonilla Sánchez* y Jorge Zaragoza Badillo***




## Resumen

El modelo de crecimiento de la población de Thomas R. Malthus predijo un futuro de hambrunas. Pero el modelo de Pierre F. Verhulst nos ayuda a comprender por qué no se ha cumplido dicha predicción. Se propone que ambos modelos y el diagrama de bifurcación obtenido del segundo, podrían servir de base para proponer un modelo matemático que nos ayude a comprender mejor el problema de la explotación intensiva y extensiva de la naturaleza.

**Palabras clave:** Explotación intensiva, explotación extensiva, recursos naturales, naturaleza, hombre, modelo matemático.

## Abstract

Thomas R. Malthus' model for population growth predicted a future of widespread famine. On the other hand, Pierre F. Verhulst's model helps us understand why this prediction has not come true. This article proposes the use of both models and the bifurcation diagram obtained from Verhulst's model as a basis for a proposed mathematical model that helps us to better understand the issue of intensive and extensive exploitation of nature.

**Keywords:** Intensive exploitation, extensive exploitation, natural resources, nature, man, mathematical model.

* Instituto de Investigaciones Económicas, Universidad Nacional Autónoma de México.

## Introducción

Dasgupta y Heal (1979), tras una revisión exhaustiva de la literatura económica producida en el periodo 1950-1970, en especial sobre crecimiento económico, encontraron que había pocas referencias a las relaciones entre recursos naturales y crecimiento económico. Una hipótesis de Dasgupta y Heal respecto a ese vacío es que, al menos en parte, en la mayoría de los países hoy considerados desarrollados las limitaciones de recursos naturales no eran consideradas como importantes, no obstante que Malthus (1798) planteó que los recursos naturales, en particular la tierra, son finitos; además afirmó que mientras la población crece exponencialmente, la producción de alimentos crece aritméticamente, creando un panorama de un futuro de escasez de alimentos y hambrunas.

Afortunadamente, las predicciones de Malthus no se han cumplido, por una parte, gracias al desarrollo científico y tecnológico que ha permitido que surjan nuevas formas de producción de alimentos para satisfacer la mayoría de las necesidades de consumo; por otra, pese a que la población mundial sigue creciendo en términos absolutos, las tasas de crecimiento de la población de la mayoría de los países desarrollados y de algunos en vías de desarrollo están descendiendo. Además, el matemático belga Pierre F. Verhulst (1845) hizo una extensión al modelo de crecimiento de la población de Malthus y demostró que las poblaciones humanas crecen en proporción a su tamaño dada una tasa de crecimiento; dicho crecimiento está limitado por la capacidad de carga (la disponibilidad de recursos y espacio).

En este trabajo se mostrará con la ecuación logística y su respectiva gráfica que si la población es pequeña empieza a crecer, pero conforme pasa el tiempo la tasa de crecimiento se va desacelerando hasta llegar a cero por los límites impuestos de acuerdo con la disponibilidad de recursos (alimentos) y espacio (territorio); también veremos que si la población es mayor que la disponibilidad de recursos y espacio, la tasa de crecimiento de la población empieza a decrecer y se detiene cuando alcanza la capacidad de carga (disponibilidad de recursos y espacio) del sistema. Este modelo, cuando es aplicado a poblaciones humanas –a diferencia del modelo de Malthus–, sugiere que el hombre tiene capacidad de adaptación a las condiciones que le imponga su entorno. En términos de espacio (territorio), si bien la mayor parte de la población mundial se encuentra hacinada en las ciudades, todavía no hemos llegado a un nivel de saturación poblacional del planeta tierra.

Uno de los asuntos más preocupantes es que en los últimos 150 años se ha venido incrementando la explotación de los recursos de la naturaleza tanto intensivamente como extensivamente. Aunque hay campañas de cuidado del medio ambiente y de reforestación de bosques y selvas, existe el riesgo de que el hombre transforme cualitativamente la naturaleza por las necesidades de producción y consumo. Para bien o para mal, ha provocado efectos y alteraciones en la naturaleza; quizás algunos sean reversibles y otros no; algunos temporales y otros definitivos; algunos inmediatos como el derrame de petróleo en el Golfo de México,[1] otros de larga gestación y maduración como la tala inmoderada de árboles o el adelgazamiento de la capa de ozono; muy notorios en ocasiones, pero la mayoría de las veces imperceptibles como la desaparición de especies vegetales y animales.

Aparte de las necesidades de producción y de consumo del hombre, más el crecimiento de la población mundial en términos absolutos, han surgido ciudades y metrópolis con más de 20 millones de habitantes algunas de ellas, que por su crecimiento acelerado han propiciado la desaparición de tierras de cultivo que han sido sustituidas por la llamada mancha urbana en casi todas las ciudades del mundo. La mayoría de las ciudades son fuente de contaminación del aire, ríos, mares, lagos y lagunas, entre otros. También se han causado alteraciones a la naturaleza por acciones bélicas como las pruebas nucleares en el fondo del mar, las explosiones de reactores en las plantas nucleares y la fabricación de todo tipo de armamento como el convencional y las armas químicas, biológicas y bacteriológicas. Todo lo anterior en conjunto ha estado degradando a la naturaleza, exponiéndonos cada vez más a un posible cambio cualitativo en la misma y las consecuencias sobre el hombre como una parte indisoluble de ella, tal y como fue señalado por Karl Marx (1932: 567 [1845]):

La historia puede ser considerada desde dos puntos de vista, dividiéndola en historia de la naturaleza e historia de los hombres. Sin embargo, no hay que dividir estos dos aspectos: mientras existan hombres, la historia de la naturaleza y la historia de los hombres se condicionan recíprocamente.

El problema de una explotación más intensiva y de mayor magnitud por parte del hombre hacia la naturaleza es difícil de cuantificar, por un lado, y por otro, es complicado observar el fenómeno en su conjunto. Éste es uno de los hechos que valdría la pena modelar porque las ventajas de hacer un modelo matemático del fenómeno son: tener un panorama del comportamiento general de éste; y la posibilidad de manipular las variables para presentar escenarios que nos guíen hacia posibles soluciones del problema.

Como una forma de avanzar hacia una modelación matemática del problema de la cada vez mayor explotación intensiva y extensiva de la naturaleza, primero presentaremos el modelo de crecimiento de la población de Malthus, después el de Verhulst (mejor conocido como la ecuación logística); y, en tercer lugar, haremos una transformación de la ecuación logística continua a la ecuación logística discreta con el propósito de obtener un diagrama de bifurcación,[2] mismo que nos permitirá darnos una idea de cómo los sistemas dinámicos no lineales son una herramienta poderosa para modelar fenómenos tan

[1] Se calculó en Estados Unidos que al momento de detener parcialmente el vertido de petróleo en el Golfo de México, éste frisaba en los 5 millones de galones, a lo que habría que adicionar los enormes montos de solventes arrojados en la zona a efecto de disolver el petróleo que estaba en la superficie marina e impedía el paso del oxígeno. Hubo una controversia muy acalorada al considerar que los solventes contribuyeron a acentuar el fenómeno destructivo del derrame petrolero. Respecto a la magnitud de la destrucción de la vida marina no se tiene la menor idea.

[2] Éste no es el modelo de la explotación intensiva y extensiva de la naturaleza, simplemente se recurrió a este diagrama por parecernos que ilustra de manera adecuada el problema que hemos planteado, además de que puede servir de motivación para hacer un modelo matemático del fenómeno aquí estudiado.

complicados y cuyos estudios empíricos (Rousseau, 2009: 161-194) son todavía incipientes.

## El modelo de crecimiento de la población de Malthus

Sean:

t = Tiempo (variable independiente).

P = Población (variable dependiente).

r = Coeficiente de la razón de crecimiento de la población (parámetro).

Entonces,

**Ecuación (1)**

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

La ecuación (1) tiene la siguiente solución analítica[3] para un problema de valor inicial:

**Ecuación (2)**

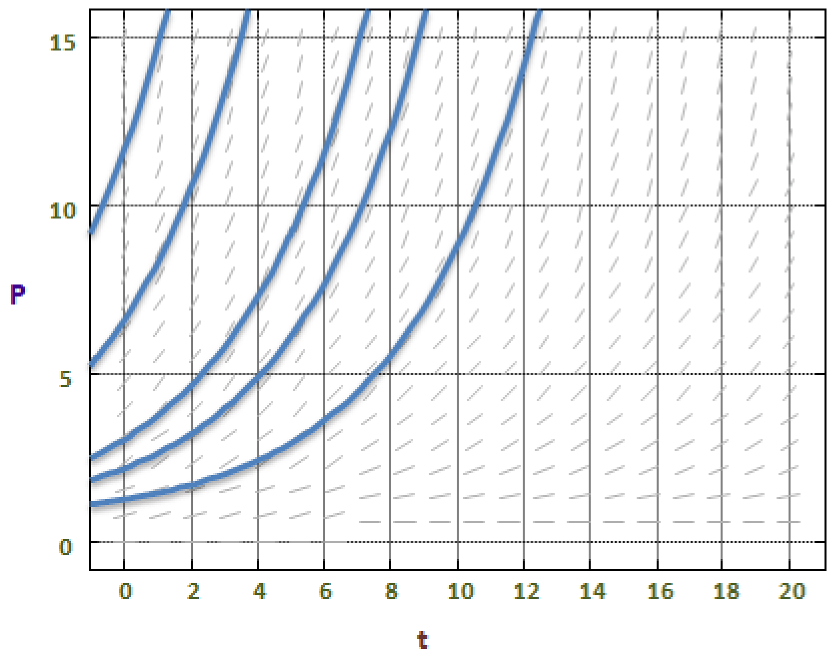
$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Con el propósito de simplificar sólo presentaremos la gráfica de la solución de la ecuación (2) con el programa de cómputo *Dfield7*:

[3] Significa que se puede resolver matemáticamente con las herramientas del cálculo diferencial e integral por el método de separación de variables.

**Gráfica 1**

**El modelo de Malthus: P ' = k P   k = 0.25**




En la gráfica 1 podemos ver que k=0.25 y diferentes condiciones iniciales (tamaños de población); en todos los casos éstas crecen exponencialmente hacia el infinito. Este modelo de Malthus muestra la visión apocalíptica del futuro de la humanidad cuando afirma que mientras la población crece exponencialmente, la producción de alimentos crece aritméticamente, es decir el futuro sería de escasez de alimentos y hambrunas. Lo que no tomó en cuenta Malthus es la capacidad de adaptación que tiene el hombre y que el crecimiento de la población tiene un límite que le pone el entorno (disponibilidad de espacios y recursos). La extensión del modelo de crecimiento de la población que hace Verhulst lo hace más realista incluyendo este último aspecto.

## El modelo de crecimiento de la población de Verhulst

La ecuación fue propuesta por Verhulst para modelar el crecimiento de cualquier población, ya sea humana o de animales. Es una ecuación paradigmática[4] porque a pesar de su sencillez es una ecuación dinámica no lineal[5] con mucho potencial para modelar y además es muy didáctica para representar un sistema dinámico no lineal que evoluciona en el tiempo.

Sean:

t = Tiempo (variable independiente).

P = Población (variable dependiente).

r = Coeficiente de la razón de crecimiento de la población[6] (parámetro).

K = Capacidad de carga[7] del sistema.

Entonces,

**Ecuación (3)**

$$\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

La ecuación (3) tiene la siguiente solución analítica para un problema de valor inicial:

[4] Se dice que una ecuación es paradigmática cuando fue propuesta para modelar un problema o fenómeno específico, pero con el tiempo se descubre que esa ecuación sirve para ilustrar o modelar fenómenos distintos del original. En este caso la estamos usando para ilustrar el incremento de la explotación intensiva y extensiva de la naturaleza por parte del hombre. Sary Levy Carciente (2002: 14), entre otros, afirma que "Muchas de las aplicaciones de la dinámica de caos a problemas económicos son adaptaciones de la ecuación logística."

[5] Es dinámica porque es una ecuación que nos representa la evolución de la variable en el tiempo y es no lineal porque es de segundo grado y su gráfica nos muestra claramente que su solución, en las diferentes condiciones iniciales, es una curva.

[6] Como lo explicamos en el pie de página 4, originalmente la ecuación logística de Verhulst se propuso para modelar poblaciones humanas. Pero como lo explica Levy, con ciertas adaptaciones se han hecho aplicaciones a problemas económicos.

[7] En el modelo original, Verhulst llama capacidad de carga a los límites territoriales y de recursos que tienen las poblaciones para poder seguir creciendo. En el fenómeno que estamos ilustrando significaría el límite que tiene la naturaleza para resistir la explotación intensiva y extensiva por parte del hombre.

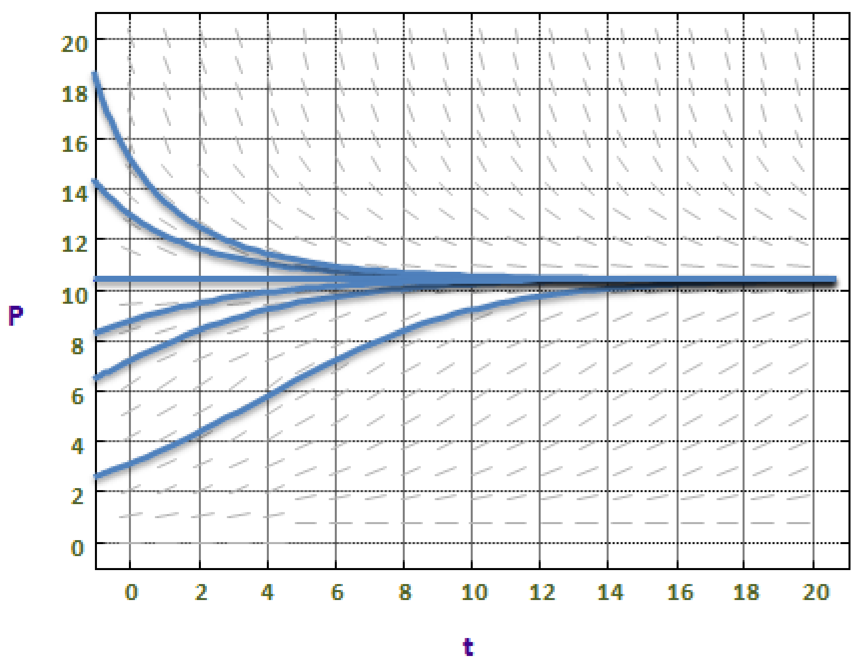
**Ecuación (4)**

$$P(t) = \frac{P_0 e^{rt}}{1 + \frac{P_0}{K}(e^{rt} - 1)}$$

Con el propósito de simplificar, sólo presentaremos la gráfica de la solución con el programa de cómputo *Dfield7*:

**Gráfica 2**

**El modelo de Verhulst: P ' = r P (1 - P/K) r = 0.30 K = 10**




En la gráfica 2 podemos ver qué r=0.30 y K=10. También observamos que ante cinco condiciones iniciales diferentes (2, 6, 8, 14 y 18), la población converge a la capacidad de carga (K) del sistema. Es decir, cuando P<K la población crece; cuando P>K la población decrece. Podemos ver que la diferencia de Verhulst con Malthus es que el primero plantea el crecimiento de la población de forma exponencial (fenómeno que en su momento fue conocido como “explosión demográfica”); el segundo plantea que el crecimiento de la población está limitado por la disponibilidad de recursos y espacio (la capacidad de carga del sistema), incluso si el tamaño de la población es excesivo, ésta empieza a decrecer hasta converger a la disponibilidad de recursos y territorio.

## La ecuación logística discreta[8]

Continuando con el ejemplo del crecimiento de la población, tratamos de afinar el modelo siguiendo las mismas ideas que nos condujeron al modelo logístico continuo del punto anterior. Entonces, la forma que adquiere el modelo logístico discreto es el siguiente:

**Ecuación (5)**

$$P_{n+1} - P_n = rp_n(1 - p_n)$$

En este caso el crecimiento de la población se expresa como la fracción de la población máxima admisible existente, en el paso del periodo *n* al periodo *n+1*, dado por la diferencia $p_{n+1} - p_n$, resultando ésta proporcional a la población existente al principio del periodo temporal y a la diferencia entre el valor de saturación y dicha población.

En la ecuación (4) y la gráfica (2) podemos observar que, dada una condición inicial $p_0$, queda determinada una sucesión de valores $p_1, p_2, ..., p_n$. Pero en el caso discreto –a diferencia del modelo continuo en el que se puede hallar la población como función explícita del tiempo *t*–, es posible obtener *p* como función explícita de *n*, esto significa que no se puede resolver analíticamente la ecuación en diferencias (5), de modo que si queremos obtener al valor de $p_n$, tendremos que calcularlo uno a uno.

Se puede transformar la ecuación (5) en otra más fácil de manejar de la siguiente manera:

$$P_n = \frac{(1+r)X_n}{r}$$

Así, obtenemos:

$$x_{n+1} = (1+r)x_n(1 - x_n)$$

[8] A diferencia de la ecuación logística continua, en la ecuación logística discreta los procesos estudiados se observan en instantes puntuales distintos y los datos experimentales obtenidos de esta manera forman entonces un conjunto discreto y ordenado de valores. Para el modelo que tomamos para este trabajo son la cantidad de población tras el primer ciclo, el siguiente número tras el segundo ciclo, luego el tercer número, y así sucesivamente.

si $k = 1 + r$, entonces tenemos que:

**Ecuación 6**

$$X_{n+1} = kx_n(1 - x_n)$$

## Diagrama de bifurcación[9] de la ecuación logística discreta

Ahora pasaremos a construir el diagrama de bifurcación aplicando la fórmula (6) y apoyándonos en el programa de cómputo *Excel*. Con este diagrama, conocido también como diagrama de Feigenbaun, podremos observar cómo el comportamiento del sistema pasa de ser ordenado a ser caótico.

Con una condición inicial, un parámetro de bifurcación y los datos experimentales obtenidos en cada ciclo, se pudo construir el diagrama de bifurcación de la gráfica 3. Para la obtención de la serie de datos y su respectiva gráfica, hemos partido con una condición inicial ($P_0 = 0.001$), un parámetro de bifurcación ($\alpha$) que va de 1 a 4, y una tasa de crecimiento de la población (k) de 0.0001.

Sean:

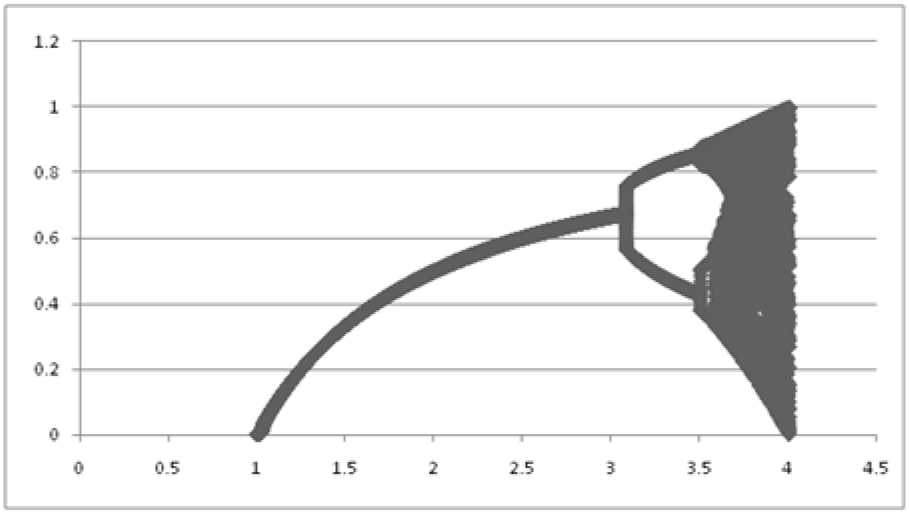
$P_0 = 0.001$ ; $1 < \alpha > 4$ ; y k=0.0001, entonces:

| Ciclo | α | $X_{n+1}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.000999 |
| ... | ... | ... |
| 20001 | 3 | 0.66667222 |
| ... | ... | ... |
| 25001 | 3.5 | 0.85689552 |
| ... | ... | ... |
| 30001 | 4 | 0.88726419 |
| 30002 | 4.0001 | 0.40011581 |
| ... | ... | ... |
| 30070 | 4.0069 | 1.00051526 |

[9] Para hacer el diagrama de bifurcación se construyó una serie con 30070 datos con ayuda del programa de cómputo *Excel*.

El diagrama de bifurcación resultante de los 30070 ciclos es el siguiente:

**Gráfica 3**
**Diagrama de Bifurcación**




En la gráfica 3 se puede ver que cuando el parámetro de bifurcación está entre 1 y 3 no hay cambio estructural; cuando el parámetro de bifurcación está entre 3.0001 y 3.5659 se presenta el primer cambio estructural con la primera bifurcación; cuando el parámetro de bifurcación está entre 3.57 y 4 hay otro cambio estructural con la aparición de bifurcaciones en las bifurcaciones y el sistema ya se encuentra entre el orden y el caos; finalmente, cuando el parámetro de bifurcación es mayor que 4 el sistema entra en régimen caótico. Desde el punto de vista de la teoría del caos, esto significa que el sistema ha pasado de ser ordenado a un nuevo estado que ya no es fácilmente predecible. El estado caótico sugiere que aunque el comportamiento del sistema es impredecible, es posible encontrar nuevas formas de auto-organización del sistema diferentes a la estructura original.

## A manera de conclusión

Afortunadamente, las predicciones catastrofistas de Malthus no se cumplieron debido a la capacidad del hombre para encontrar nuevas formas de producción y distribución de los alimentos. Además del éxito que han tenido los métodos empleados para desacelerar la tasa de crecimiento de la población.

Algunas aplicaciones del modelo de Verhulst a poblaciones de bacterias, animales y humanas han mostrado que el crecimiento de la población, en los diferentes casos, se ajusta más a la ecuación logística que a la ecuación de Malthus.

Sin embargo, hay evidencia de que a partir de la Revolución Industrial y la consecuente industrialización acelerada que ésta trajo consigo, la producción de bienes y servicios para el consumo del hombre se ha convertido en un proceso que ha provocado un incremento en la explotación intensiva y extensiva de la naturaleza.

Aunque hay algunos trabajos que sugieren cómo cuantificar los daños al medio ambiente y otros de cómo sancionar dichos daños, quizá todavía no hemos tomado conciencia de que podríamos modificar a tal grado la estructura de la naturaleza que dicho cambio tendría consecuencias sobre el hombre porque éste es parte indisoluble de la naturaleza; es decir, cualquier alteración que hagamos a la naturaleza, tarde o temprano nos afectaría en un grado mayor o menor.

Como es difícil observar el fenómeno en su totalidad (la explotación intensiva y extensiva de la naturaleza), es necesario y posible hacer un modelo matemático que nos permita observar el comportamiento general de aquél, además de la posibilidad de manipular las variables del modelo para plantear escenarios que nos ayuden a encontrar soluciones. En ese sentido, se presentaron los modelos de Malthus y Verhulst. Este último, también conocido como la ecuación logística, se transformó en su versión discreta con el propósito de construir el diagrama de bifurcación para mostrar el potencial que tienen las matemáticas no sólo para cuantificar, sino como una metodología para modelar fenómenos complicados como el que aquí se expuso. Ojalá que la presentación de los modelos mencionados sirvan de motivación para hacer un modelo sobre la explotación intensiva y extensiva de la naturaleza.

## Bibliografía

Bifani, Paolo (2007), *Medio ambiente y desarrollo*, Guadalajara, Editorial Universitaria, Universidad de Guadalajara.

Blanchard, Paul, Robert L. Devaney y Glen R. Hall (1999), *Ecuaciones Diferenciales*, México, Ed. International Thompson Editores.

Bonilla Sánchez, Arturo (2004), *Los clásicos y el problema de la reposición ambiental*, México, Ed. Centro de Estudios para el Desarrollo Nacional.

Dasgupta, P. y G. Heal (1979), *Economic Theory and Exhaustible Resources*, UK, Cambridge University Press.

Levy Carciente, Sary (2002), “Complejidad Económica desde la perspectiva caótica”, Caracas, *Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura*, vol. VIII, núm. 002, julio-diciembre, Universidad Central de Venezuela.

Malthus, Thomas R. (1998) [1798], *Ensayo sobre el principio de la población*, México, Fondo de Cultura Económica.

Marx, Karl (1932) [1845], *La ideología alemana*, versión MEGA de Berlín.

Pérez-Cacho García, Santiago (2002), *Modelos matemáticos y procesos dinámicos*: *un primer contacto*, Valladolid, Universidad de Valladolid, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial.

Rivas David, M. (coord.) (2004), *Desarrollo sostenible y estructura económica mundial*, Madrid, CIDEAL-ATD.

Rodríguez Jiménez, Juan José (dir.) (2008), *Hacia un uso sostenible de los recursos naturales*, Sevilla, Ed. Universidad Internacional de Andalucía.

Rousseau, Sandra (2009), "Empirical Analysis of Sanctions for Environmental Offenses", en *International Review of Environmental and Resource Economics*, vol. 3, núm. 3, pp.161-194.

Verhulst, Pierre.F. (1845), "Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population" en *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, Bruselas, Núm 20, pp. 1-32.