

# Evaluación de ecuaciones de factor de fricción explícito para tuberías

Alejandro Isaías Anaya-Durand,<sup>1</sup> Guillermo Israel Cauich-Segovia,  
Oliver Funabazama-Bárceñas<sup>2</sup> y Víctor Alfonso Gracia-Medrano-Bravo\*

## ABSTRACT (Evaluation of explicit friction factor equations for pipes)

Within Chemical Engineering, there are a lot of problems involving fluids in motion, and for their solution we must consider the causes of the movement. In this case there is a force that stops fluid from moving, called friction. The evaluation of this term comes from an extended analysis of all the forces that cause stress on a differential element of volume in the bulk of the fluid. The objective of this paper is to evaluate different mathematical models that describe in an explicit form the friction factor of a fluid in a pipe. We accomplish this by comparing the numerical values against the Colebrook-White equation and the Kármán number. Needless to say there is not a perfect model to describe this kind of phenomena. But we hope to expand the knowledge of the reader, and let him to choose the best model depending on the situation.

**KEYWORDS:** friction factor, Darcy friction factor, Colebrook-White equation, head losses in pipes

## Resumen

Dentro de la Ingeniería Química existen muchas situaciones que involucran fluidos en movimiento, y para poder resolverlas se deben considerar las causas del movimiento. Respecto a lo anterior, existe una fuerza que impide el movimiento del fluido, la cual es denominada *fricción*. La evaluación de este término viene de un análisis extenso de todas las fuerzas que causan un esfuerzo sobre un elemento diferencial de volumen en el seno del fluido. El objetivo de este artículo es evaluar diferentes modelos matemáticos que describan, mediante una forma explícita, el factor de fricción para un fluido en una tubería. Esto se realizó mediante la comparación de valores numéricos de dichos factores respecto a la ecuación de Colebrook-White y el número de Kármán. Como es bien sabido, no existe un modelo perfecto que permita describir este tipo de fenómeno; sin embargo, se espera proveer de conocimientos al lector, tal que le permita escoger por sí mismo el modelo más apropiado según la situación que se le presente.

**Palabras clave:** factor de fricción, factor de fricción de Darcy, ecuación de Colebrook-White, caída de presión en tuberías

## Introducción

El flujo de fluidos es una parte crucial para realizar operaciones en las plantas industriales, especialmente en el sector de la industria química. Dentro de la dinámica de éstos, siempre ocurre fricción de los mismos con la tubería y en diferentes accesorios, ocasionando pérdidas de presión en el flujo a lo largo de su trayectoria. Es importante conocer esta caída de presión para una apropiada operación del proceso a realizar, por ello se han efectuado diferentes estudios para la evaluación de ellas. Las pérdidas de presión pueden determinarse a través de un balance de energía mecánica, según la

ecuación (1), la cual es una derivación del Teorema de Bernoulli para flujos incompresibles.

En la ecuación (2), conocida como ecuación de Darcy-Weisbach, se requiere conocer un factor  $f'$ , llamado factor de fricción de Darcy, el cual es una variable adimensional y depende tanto del número de Reynolds ( $Re$ , el cual a su vez es un factor adimensional que relaciona las fuerzas dinámicas del fluido), y la rugosidad relativa de la tubería ( $\epsilon/D$ ), la cual es un indicador de las imperfecciones del material de la misma tubería.

$$P_1 V_1 + z_1 \left( \frac{g}{g_c} \right) + \frac{\bar{v}_1^2}{2\alpha g_c} + Q - W_f = P_2 V_2 + z_2 \left( \frac{g}{g_c} \right) + \frac{\bar{v}_2^2}{2\alpha g_c} + \sum Fr \quad (1)$$

donde

\* Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México.

**Teléfonos:** 044-55 5503 5898; 044-55 1032 7490

**Correos electrónicos:** (1) ofunaba@hotmail.com; (2) aanayadurand@hotmail.com

**Fecha de recepción:** 18 de enero de 2013.

**Fecha de aceptación:** 23 de diciembre de 2013.

$$\sum Fr = \frac{f' \sigma^2 L}{2g_c D} \quad (2)$$

Cuando el fluido es enviado a condiciones de flujo laminar ( $Re \leq 2100$ ), el factor de fricción solo depende del número de Reynolds y se calcula a partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille:

$$f' = \frac{64}{Re} \quad (3)$$

Por otro lado, cuando el flujo es a régimen turbulento ( $Re \geq 4 \times 10^3$ ), el factor de fricción es generalmente calculado por la ecuación (4), conocida como la ecuación de Colebrook-White (CW):

$$\frac{1}{\sqrt{f'}} = -2 \log \left[ \frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f'}} \right] \quad (4)$$

Esta ecuación está basada en estudios experimentales en tuberías comerciales e incluye consideraciones teóricas de los trabajos de von Karman y Prandtl, misma que el propio Lewis F. Moody (1944) afirmó que arrojaban resultados satisfactorios, ya que contempla tuberías lisas y rugosas, de la cual se origina el conocido Diagrama de Moody para obtener de manera gráfica factores de fricción. Lo anterior convierte a la correlación de CW en una ecuación estándar y la más aceptada para la estimación del factor de fricción a régimen turbulento y para rugosidad relativa ( $0 < \epsilon/D < 0.05$ ). Sin embargo, como se observa en la ecuación (4), el factor de fricción se encuentra implícito en ella, impidiendo su despeje y complicando su utilización, para lo cual se requiere del uso de métodos numéricos.

No obstante, años después (mediados de 1970) de la publicación de la correlación de CW se han propuestos diversos modelos matemáticos que permiten obtener el valor del factor de fricción mediante ecuaciones explícitas.

Cabe mencionar que para la zona de transición entre régimen laminar y turbulento no existe una correlación confiable para determinar el valor de factor de fricción, ya que depende de varios factores como cambios de sección, de dirección del flujo y obstrucciones tales como válvulas corriente arriba de la zona considerada. Por ello, se recomienda, en caso de ser requerido, basarse en el Diagrama de Moody.

### Justificación y objetivo

La aplicación de métodos numéricos para encontrar el valor del factor de fricción se puede volver una tarea muy tediosa, y aún más cuando ésta tiene que ser calculada en repetidas ocasiones durante la realización de problemas académicos o incluso en la evaluación de proyectos industriales. Por ello, el objetivo del trabajo es presentar una compilación de ecuaciones explícitas para el cálculo de factor de fricción, así como la comparación de las mismas respecto a la ecuación de Colebrook-White en el régimen turbulento, que permita seleccionar alguna de ellas como una ecuación práctica y sencilla para la determinación de dicho factor de fricción.

### Correlaciones halladas en la literatura

En la tabla 1 se presentan varias correlaciones reportados en la literatura utilizadas para calcular el valor del factor de fricción.

**Tabla 1.** Correlaciones halladas en la literatura.

No. Mod.	Modelo	Correlación	Rango de Aplicación
1	Filonenko <sup>[8]</sup>	$f' = [1.82 \log(Re) - 1.64]^{-2}$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ Tuberías hidráulicamente lisas
2	Altshul (1) <sup>[10]</sup>	$f' = 0.11 \left[ \left( \frac{\epsilon}{D} \right) + \left( \frac{68}{Re} \right) \right]^{0.25}$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ $1 \times 10^{-6} < \epsilon/D < 0.05$
3	Altshul (2)	$f' = \left\{ 1.8 \log \left[ \frac{Re}{0.135 \cdot Re \cdot \left( \frac{\epsilon}{D} \right) + 6.5} \right] \right\}^{-2}$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ $1 \times 10^{-6} < \epsilon/D < 0.05$
4	Konakov <sup>[11]</sup>	$f' = [1.8 \log(Re) - 1.5]^{-2}$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ Tuberías hidráulicamente lisas
5	Shacham (1) <sup>[20]</sup>	$f' = \left\{ -2 \log \left[ \frac{\left( \frac{\epsilon}{D} \right)}{3.7} - \frac{5.02}{Re} \log \left( \frac{\left( \frac{\epsilon}{D} \right)}{3.7} + \frac{14.5}{Re} \right) \right] \right\}^{-2}$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ $1 \times 10^{-6} < \epsilon/D < 0.05$
6	Shacham (2) <sup>[20]</sup>	$f' = \left[ \frac{X(1-\ln X) - \left( \frac{\epsilon}{D} \right)}{1.15129X + \frac{2.51}{Re}} \right]^{-2}$ donde $X = \frac{\left( \frac{\epsilon}{D} \right)}{3.7} - \frac{5.02}{Re} \log \left( \frac{\left( \frac{\epsilon}{D} \right)}{3.7} + \frac{14.5}{Re} \right)$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ $1 \times 10^{-6} < \epsilon/D < 0.05$

No. Mod.	Modelo	Correlación	Rango de Aplicación
7	Chen <sup>[4]</sup>	$f' = \left[ -2 \log \left( \frac{\left(\frac{\epsilon}{D}\right)}{3.7065} - Y \right) \right]^{-2}$ $Y = \frac{5.0452}{Re} \log \left[ \frac{\left(\frac{\epsilon}{D}\right)^{1.1098}}{2.8257} + Z \right] \quad y \quad Z = 5.8506(Re)^{-0.8981}$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ $1 \times 10^{-6} < \epsilon/D < 0.05$
8	Churchill <sup>[5]</sup>	$f' = 8 \left[ \left(\frac{8}{Re}\right)^{12} + (A + B)^{-\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{12}}$ $A = \left[ 2.457 \ln \left( \frac{1}{\left(\frac{7}{Re}\right)^{0.9} + 0.27\left(\frac{\epsilon}{D}\right)} \right) \right]^{16} \quad y \quad B = \left(\frac{37530}{Re}\right)^{16}$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ $1 \times 10^{-6} < \epsilon/D < 0.05$
9	P.K. Swamee y A.K. Jain <sup>[21]</sup>	$f' = 0.25 \left( \log \frac{1}{3.7 \frac{D}{\epsilon}} + \frac{5.74}{Re} \right)^{-2}$	$5 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ $1 \times 10^{-6} < \epsilon/D < 0.001$
10	Pavlov <sup>[3]</sup>	$f' = \left\{ -2 \log \left[ \frac{1}{3.7} \left(\frac{\epsilon}{D}\right) + \left(\frac{6.81}{Re}\right)^{0.9} \right] \right\}^{-2}$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$
11	Round <sup>[19]</sup>	$f' = \left\{ -1.8 \log \left[ 0.27 \left(\frac{\epsilon}{D}\right) + \frac{6.5}{Re} \right] \right\}^{-2}$	
12	Barr <sup>[2]</sup>	$f' = \left\{ -2 \log \left[ \frac{1}{3.7} \left(\frac{\epsilon}{D}\right) + \frac{4.518 \log \left(\frac{Re}{7}\right)}{Re \left(1 + \frac{1}{29} Re^{0.52} \left(\frac{\epsilon}{D}\right)^{0.7}\right)} \right] \right\}^{-2}$	
13	Zigrang y Sylvester <sup>[23]</sup>	$f' = \left\{ -2 \log \left[ \frac{1}{3.7} \left(\frac{\epsilon}{D}\right) - \frac{5.02}{Re} \log \left( \frac{1}{3.7} \left(\frac{\epsilon}{D}\right) - \frac{5.02}{Re} \log \left( \frac{1}{3.7} \left(\frac{\epsilon}{D}\right) + \frac{13}{Re} \right) \right) \right] \right\}^{-2}$	
14	S. E. Haaland <sup>[9]</sup>	$f' = \left\{ -1.8 \log \left[ \left(\frac{\frac{\epsilon}{D}}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right] \right\}^{-2}$	$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$ $1E-6 < \epsilon/D < 0.05$
15	Manadilli <sup>[13]</sup>	$f' = \left\{ -2 \log \left[ \frac{\frac{\epsilon}{D}}{3.7} + \frac{95}{Re^{0.983}} - \frac{96.82}{Re} \right] \right\}^{-2}$	$5235 < Re < 1 \times 10^9$ Cualquier valor de $\epsilon/D$
16	Romeo et al. <sup>[18]</sup>	$f' = \left\{ -2 \log \left[ \frac{\frac{\epsilon}{D}}{3.7065} - \frac{5.0272}{Re} A \right] \right\}^{-2}$ $A = \log \left[ \frac{1}{3.827} \left(\frac{\epsilon}{D}\right) - \frac{4.567}{Re} \log \left( \left(\frac{1}{7.7918} \left(\frac{\epsilon}{D}\right)\right)^{0.9924} + \left(\frac{5.3326}{208.815 + Re}\right)^{0.9345} \right) \right]$	$3 \times 10^3 < Re < 1.5 \times 10^8$ $0 < \epsilon/D < 0.05$

### Evaluación y discusión de las correlaciones

Cada una de las correlaciones antes presentadas fue evaluada y comparada respecto a su desviación con la ecuación de CW (universalmente aceptada). La desviación se calculó de la

siguiente manera:

$$\% \text{ Desviación} = \left| \frac{VCW - VCE}{VCW} \right| * 100\%$$

donde  $VCW$  y  $VCE$  son los valores obtenidos por la ecuación de  $CW$  y la correlación en estudio, respectivamente.

Los valores del factor de fricción por la ecuación de  $CW$  fueron obtenidos usando el método numérico de Newton-Raphson, el cual se basa en realizar iteraciones hasta la convergencia del valor del factor de fricción mediante un algoritmo diseñado por dichos autores. Para lo anterior, se consideró un valor arbitrario de rugosidad relativa  $\epsilon/D = 0.001$ , para todos cálculos, y considerando únicamente como variable el número de Reynolds,  $Re$ .

El estudio se basa en dos aspectos fundamentales: la desviación del valor obtenido por las correlaciones en el régimen turbulento y la simplicidad y practicidad de la misma. Respecto del flujo turbulento, se realizó una subdivisión de éste, a saber, inicios del régimen turbulento ( $4 \times 10^3 < Re \leq 1 \times 10^5$ ) y completa turbulencia ( $1 \times 10^5 < Re \leq 1 \times 10^8$ ). Esto con el fin de poder apreciar mejor el comportamiento de las correlaciones en dichas secciones, puesto que en la industria generalmente se usan factores de fricción a total turbulencia.

### Inicios del régimen turbulento

En esta región de flujo turbulento, se encontró que la mayoría de las correlaciones tienden a disminuir su desviación

conforme aumenta el  $Re$ , hasta un 22%; no obstante, la correlación de Round resultó ser mejor aproximación a todas ellas, puesto que alcanzó un mínimo de 11.4% de desviación [figura 1a]. Aun así, se observaron las correlaciones que obtenían buenas aproximaciones después de la Round, de las cuales las mejores resultaron ser las de: Manadilli (con un mínimo de 22.3%), Churchill (mínimo de 22.6%), Pavlov (mínimo de 22.8%), incluyendo la de Altshul (2) (mínimo de 21.8%, cuando  $Re > 7 \times 10^4$ , ya que al principio del régimen turbulento tiene mayor desviación que las anteriores) [figura 1b].

Considerando la simplicidad de las correlaciones anteriores, la de Round es sin lugar a dudas, la más sencilla y práctica, aunado a que es la que menor desviación presenta respecto a la de  $CW$ . Así, la correlación de Round es la sugerida para utilizarse en el caso de encontrarse en los inicios del régimen turbulento.

### Completa turbulencia

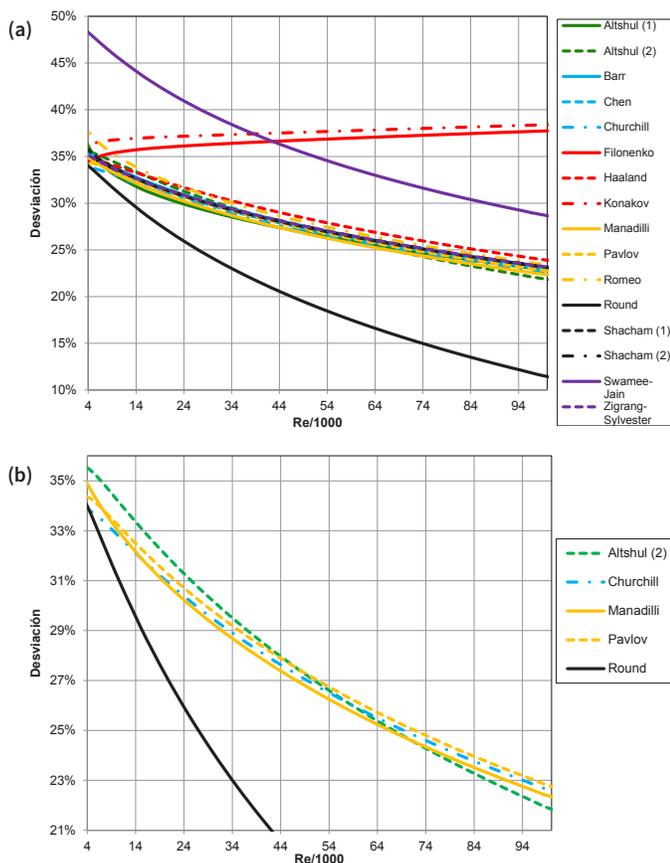
Esta región es la más frecuente en las situaciones presentes en la industria, por lo cual las correlaciones deben poseer una muy baja desviación para ser realmente útil. Del estudio se puede comentar lo siguiente: la correlación de Round aproxima mejor para  $1 \times 10^5 < Re < 5 \times 10^5$  con un valor máximo de desviación del 11.4%; la de Altshul (2) para  $5 \times 10^5 < Re < 3 \times 10^6$  con un 7.8% de desviación máxima. Sin embargo, para  $Re > 3 \times 10^6$  ambas correlaciones poseen valores demasiados altos de desviación, por lo cual no pueden ser consideradas representativas de toda la región de total turbulencia, aunque podrían ser consideradas en caso de encontrarse en un flujo a dichas condiciones. No obstante, existen otras correlaciones que poseen una mejor aproximación capaz de resolver esta situación [figura 2a].

Como se aprecia en la figura 2b, cuando  $Re > 8 \times 10^6$ , la correlación de Haaland resulta ser la que mejor aproxima, con una desviación menor que 1% (mínimo de 0.01% en  $Re = 5 \times 10^7$  y 0.1% cuando  $Re$  tiende a  $1 \times 10^8$ ). Comportamientos similares se obtienen usando los modelos de Pavlov Manadilli, Zigrang-Sylvester y Swamee-Jain, principalmente, todas ellas con un porcentaje de desviación menor que 1% (mínimos de 0.10% cuando  $Re$  tiende a  $1 \times 10^8$ ).

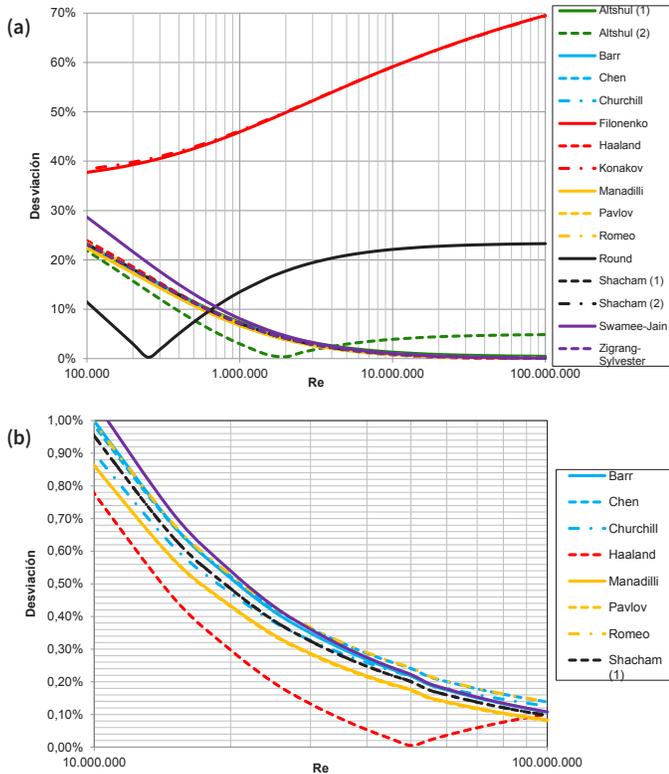
Cabe destacar que de las correlaciones antes mencionadas, las más simples y sencillas de utilizar para cálculos son la de Pavlov y de la de Haaland, en ese orden. Al evaluar estos dos modelos para la totalidad de la región de completa turbulencia, se halló que la de Pavlov posee menor desviación que la de Haaland [figura 2a], por lo que la convierte en la mejor correlación para evaluar el factor de fricción en regímenes de completa turbulencia.

Ahora, ¿cuáles serían las aplicaciones prácticas de tener una buena correlación para calcular los valores de factores de fricción?

Cuando se trata de resolver problemas en los que intervienen flujos fluidos, comúnmente existen tres principales situaciones a determinar, como mencionan Anaya et al. (2005):



**Figura 1.** Desviaciones de las ecuaciones explícitas a inicios de régimen turbulento. (a) Comportamiento general de las correlaciones, (b) Acercamiento de la gráfica (a), con las correlaciones con menor desviaciones.



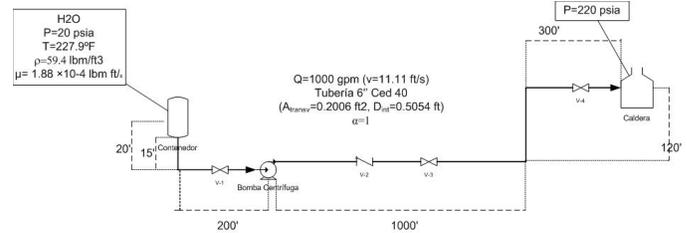
**Figura 2.** Desviaciones de las ecuaciones explícitas en régimen completamente turbulento: (a) Comportamiento general de las correlaciones en escala logarítmica; (b) Acercamiento de la gráfica (a) con las correlaciones con menores desviaciones

- 1) La caída de presión, cuando son conocidas la velocidad del fluido y el diámetro de la tubería.
- 2) La velocidad del fluido (que a su vez permite determinar el flujo del mismo), conocidas la caída de presión y el diámetro de la tubería.
- 3) El diámetro requerido de la tubería, conocidas la caída de presión y el flujo en ella.

Para poder acatar cada una de las situaciones anteriores en muchas ocasiones es necesario conocer el valor de factor de fricción para estimar de manera aceptable las pérdidas por fricción a lo largo de la tubería. Además de ello, existen otras situaciones donde se requiere dicho valor, como son en la estimación de pérdidas de presión en accesorios, cálculo de bombas, que de manera general influyen en estimado de costos ya sea de sistemas de tuberías y/o equipos, e inclusive en toma de decisiones de diseño de procesos, lo cual hace que verdaderamente una correlación sencilla y práctica para realizar cálculos rápidos.

A manera de ejemplo se presenta una situación en donde se requiere una toma de decisión a partir de la realización de un cálculo rápido con base en el uso de la correlación de Pavlov, comparándola con los resultados obtenidos con la ecuación de CW.

**Situación.** Una sección de planta industrial requiere generar vapor a una determinada presión, enviando un flujo de agua hacia una caldera, según el esquema de la figura 3. Sin embargo, actualmente dicha planta únicamente cuenta con tres bombas centrífugas: una de 200 HP, una de 250 HP y otra de 300 HP. Considerando que la eficiencia mecánica de éstas es de 0.75 y que la longitud equivalente de los accesorios en el sistema de tuberías es aproximadamente 314 ft, ¿qué bomba utilizaría para dicho proceso y por qué?



**Figura 3.** Esquema de proceso de la alimentación a una sección de generación de vapor de una planta industrial

## Solución

Calculando cada uno de los términos de la Ec. (1):

$$\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} = \frac{(220 - 20) \frac{\text{lb}_f}{\text{in}^2}}{59.4 \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^3}} * \frac{144 \text{in}^2}{\text{ft}^2} = 484.85 \frac{\text{lb}_f \text{ft}}{\text{lb}_m}$$

$$\Delta z \left( \frac{g}{g_c} \right) = (120 - 20) \text{ft} * \frac{32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}}{32.2 \frac{\text{lb}_m \text{ft}}{\text{lb}_f \text{s}^2}} = 100 \frac{\text{lb}_f \text{ft}}{\text{lb}_m}$$

$$\frac{\Delta \mathcal{V}^2}{2\alpha g_c} = \frac{\mathcal{V}_2^2 - \mathcal{V}_1^2}{2\alpha g_c} = \frac{(11.11 - 0) \frac{\text{ft}}{\text{s}}}{2(1)(32.2 \frac{\text{lb}_m \text{ft}}{\text{lb}_f \text{s}^2})} = 1.92 \frac{\text{lb}_f \text{ft}}{\text{lb}_m}$$

Calculando el número de Reynolds para obtener el régimen al cual se encuentra el flujo de agua:

$$Re = \frac{D \mathcal{V} \rho}{\mu} \quad (5)$$

$$Re = \frac{(0.5054 \text{ ft}) \left( 11.11 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \right) \left( 59.4 \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^3} \right)}{1.8815 \times 10^{-4} \frac{\text{lb}_m \text{ft}}{\text{s}}} = 1.77 \times 10^6$$

Usando la ecuación de Pavlov (modelo 10, tabla 1)

$$f' = \left\{ -2 \log \left[ \frac{1}{3.7} (0.001) + \left( \frac{6.81}{1.77 \times 10^6} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2}$$

$$f' = 0.01964$$

[Desviación de 5.4%, Ec. CW:  $f' = 0.02075$ ]

A partir de la Ec. (2)

$$\sum Fr_{1 \rightarrow 2} = \frac{f' v^2 L}{2g_c D} = \frac{(0.01964) \left(11.11 \frac{ft}{s}\right)^2 (1635 + 314) ft}{2 \left(32.2 \frac{lb_m ft}{lb_f s^2}\right) (0.5054 ft)} = 145.16 \frac{lb_f ft}{lb_m}$$

[Usando el valor de  $a$  partir de Ec. CW,  $\sum Fr_{1 \rightarrow 2} = 153.37 \frac{lb_f ft}{lb_m}$ ]

A partir de la Ec. (1) se obtiene la cabeza de la bomba ( $-W_f = H$ ,  $Q = 0$ )

$$H = \Delta z \left(\frac{g}{g_c}\right) + \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{\Delta v^2}{2\alpha g_c} + \sum Fr_{1 \rightarrow 2}$$

$$H = 731.93 \frac{lb_f ft}{lb_m}$$

Finalmente se obtiene la potencia de la bomba con la Ec. (6)

$$BHP = \frac{Q_{gpm} H_{ft} S_g}{\eta_{bomba}} \quad (6)$$

$$BHP = \frac{(1000 \text{ gpm}) \left(731.93 \frac{lb_f ft}{lb_m}\right) (1)}{3960 (0.75)} = 246 \text{ HP}$$

[Usando el valor de  $a$  partir de  $f'$  Ec. CW,  $BHP = 233.63 \text{ HP}$ ]

Por tanto, para la planta industrial se requiere utilizar la bomba de 250 HP, ya que la de 200 HP no posee la potencia necesaria para bombear el fluido hasta la caldera y la de 300 HP se encuentra "sobrada", es decir, puede usarse pero no se estaría aprovechando eficientemente la energía.

Como se observa, los resultados obtenidos según la correlación de Pavlov son parecidos a los que se obtuvieron con la ecuación de CW, lo cual comprueba que la primera es una correlación lo suficientemente práctica para realizar cálculos sin tener una gran desviación.

## Conclusiones

Del presente trabajo, se recomienda utilizar la correlación de Pavlov:

$$f' = \left\{ -2 \log \left[ \frac{1}{3.7} \left(\frac{\epsilon}{D}\right) \right] + \left(\frac{6.81}{Re}\right)^{0.9} \right\}^{-2}$$

para realizar cálculos en la determinación de caídas de presión, sea en problemas académicos como en situaciones reales que requieren de una rápida resolución sin escatimar precisión respecto al valor obtenido por la ecuación de Colebrook-White.

Ésta se caracterizó por tener un valor máximo de 34.4% de desviación (en la región de transición) y un mínimo de 0.08% (en la región de completa turbulencia), y además de ser simple y práctica para realizar cálculos rápidos cuando se requiera, misma que resulta ser apropiada para el rango de  $2 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8$  y  $\epsilon/D < 0.05$ ).

## Nomenclatura

$Re$	Número de Reynolds
$f'$	Factor de Fricción de Darcy
$\epsilon/D$	Rugosidad Relativa
$P_i$	Presión
$\rho$	Densidad
$\mu$	Viscosidad
$D$	Diámetro de la Tubería
$V_i$	Volumen Específico
$z_i$	Altura relativa del sistema
$g$	Aceleración de la gravedad
$g_c$	Factor de conversión ( $32.2 \text{ lbm ft s}^{-2} \text{ lbf}^{-1}$ )
$\alpha$	Factor de corrección de la aceleración de la gravedad
$\bar{v}_i$	Velocidad del fluido
$Q$	Calor del Sistema
$W_f$	Trabajo de Bomba
$Fr$	Trabajo de Fricciones
$Q_{gpm}$	Flujo volumétrico (gpm)
$H_{ft}$	Cabeza de la bomba ( $\text{lbf ft lbf}^{-1}$ )
$S_g$	Gravedad específica
$\eta_{bomba}$	Eficiencia mecánica de la bomba
$BHP$	Potencia requerida de la bomba
$L$	Longitud de la Tubería
$CW$	Colebrook-White

## Referencias

- Anaya-Durand, A.; García-Quezada, C.; Garrido-Martínez, D.; Islas-Flores, O.; Jiménez-Colín, K.; Rodríguez-Escobar, J. J., Solución de problemas de flujo de fluidos, utilizando gráfica modificada de Moody, *Educación Química*, **16**(4), 582-585, 2005.
- Barr, D. I., Solutions of the Colebrook-White function for resistance to uniform turbulent flow, *Proc. Inst. Civil Engrs.*, **2** (71), 529, 1981.
- Camaraza, Y.; Landa, J.; López, D.; García, O., Ecuación explícita para el cálculo de factores de fricción en la zona de transición del régimen turbulento, *Tecnología Química*, **XXX**(1), 76-83, 2010.
- Chen, N. H., An explicit equation for friction factor in pipe, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **18** (3), 296, 1979.
- Churchill, S. W., Friction factor equations spans all fluid-flow regimes, *Chem. Eng.*, **84** (24), 91, 1977.
- Coban, M. T., Error analysis of non-iterative friction factor formulas relative to Colebrook-White equation for the calculation of pressure drop in pipes, *Journal of Naval Science and Engineering*, **8**(1), 1-13, 2012.
- Crane, *Flujo de Fluidos en Válvulas, Accesorios y Tuberías*, México: McGraw Hill, 1987.
- Filonenko, G. K., Hydraulic Resistance in Pipes, *Teploenergetika*, **4**, 15-21, 1954.
- Haaland, S. E., Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow, *Trans. ASME, JFE* **105**, 89, 1983.

- Idelchik, I. E., *Handbook of Hydraulic Resistances* (pp. 50-92), Moscow, Russia: Mashinostroenie, 1975.
- Konakov, K. V., *Dok. Akad. Nauk SSSR*, **25**(5), 14-24, 1950.
- Levenspiel, O., *Flujo de Fluidos e Intercambio de Calor*, Barcelona, España: Reverté, 1993.
- Manadilli, G., Replace implicit equations with signomial functions, *Chem. Eng.*, **104** (8), 129, 1997.
- Moody, L. F., Friction factor for pipe flow, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 66, 671-678, 1944.
- Mott, R., *Mecánica de Fluidos Aplicada*. Naucalpan, México: Pearson-Prentice Hall, 1996.
- Olujic, Z., Compute friction factor fast for flow in pipes, *Chemical Engineering*, **88**(25), 91-93, 1981.
- Ramakrishna, A.; Kumar, B., Friction factor for turbulent pipe flow, consultada por última vez en diciembre 28, 2012, de la URL [http://eprints.iisc.ernet.in/9587/1/Friction\\_Factor\\_for\\_Turbulent\\_Pipe\\_Flow.pdf](http://eprints.iisc.ernet.in/9587/1/Friction_Factor_for_Turbulent_Pipe_Flow.pdf)
- Romeo, E., Royo, C., Monzón, A., Improved explicit equations for estimation of the friction factor in rough and smooth pipes, *Chemical Engineering Journal*, **86**(3), 369-374, 2002.
- Round, G. F., An explicit approximation for the friction-factor Reynolds number relation for rough and smooth pipes, *Can. J. Chem. Eng.* **58** (1), 122, 1980.
- Shacham, M., An explicit equation for friction factor in pipe, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **19**(2), 228-230, 1980.
- Swamee, P. K.; Jain, A. K., Explicit equation for pipe flow problems, *J. Hydr. Div., ASCE*, **102**(5), 657-664, 1976.
- Wilkes, J., Bike, S., *Fluid Mechanics for Chemical Engineers*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1999.
- Zigrang, D. J., Sylvester, N. D., Explicit approximations to the Colebrook's friction factor, *AIChEJ*, **28**(3), 514, 1982.