Solución de problemas de flujo de fluidos, utilizando gráfica modificada de Moody

Alejandro Anaya-Durand, Cuauhtémoc García-Quezada, Daniel Garrido-Martínez, Oscar Islas-Flores, Karina Jiménez-Colín, Juan Jesús Rodríguez-Escobar

Abstract

Pressure drop fluid problem can be classified in three types:

1) Determine pressure drop, for a flow and pipe diameter given.
2) Determine flow (or velocity), for a pressure drop and pipe diameter given.
3) Determine pipe diameter for a flow and pressure drop given.

The first kind of problem can be solved directly with the conventional Reynolds-friction chart (Moody). The second kind of problem can be solved directly by using the modified Moody chart designed by Karman. In this article is shown the application of another modified of Moody chart, that enables to solve the third kind of problem (pipe unknown), directly.

Los problemas de caídas de presión de fluidos en tuberías pueden ser de los siguientes tipos:

1) Cálculo de la caída de presión, cuando se conoce la velocidad del fluido y el diámetro de la tubería.
2) Cálculo de la velocidad (y el flujo), para una caída de presión dada y un diámetro del tubo conocido.
3) Cálculo del diámetro requerido de una tubería, para una caída de presión y flujo dados.

La solución del *primer tipo* de problema se obtiene directamente utilizando la gráfica de Moody (1944) convencional, que relaciona los parámetros de número de Reynolds (Re), factor de fricción (f') y rugosidad relativa del tubo ($r = \xi / D$).

$$\text{Re (abscisa)} = \frac{dv\rho}{\mu} \tag{1}$$

$$f' \text{ (ordenada)} = \frac{2gh_f D}{v^2 L} \qquad \text{(Factor de Darcy)} \tag{2}$$

$$r \text{ (parámetro)} = \frac{\xi}{D} \qquad \text{(rugosidad relativa)} \tag{3}$$

Dicha gráfica se encuentra con facilidad en publicaciones relacionadas con el diseño de tuberías (Crane, 1992).

La solución del *segundo tipo* de problema no se puede obtener directamente utilizando la gráfica convencional del factor de fricción, dado que la incógnita, en este caso, la velocidad, aparece simultáneamente tanto en el valor de la abscisa (Reynolds), como en la ordenada (factor de fricción). La solución debe efectuarse en forma iterativa, o bien, mediante el uso de la gráfica de Moody modificada por von Kármán (1939).

Abscisa:

$$\text{Re}\sqrt{f'} = \frac{dv\rho}{\mu}\sqrt{\frac{2gh_f D}{v^2 L}} = \frac{d\rho}{\mu}\sqrt{\frac{2gh_f D}{L}} \tag{4}$$

Ordenada:

$$\frac{1}{\sqrt{f'}} = \frac{v}{\sqrt{\dfrac{2gDh_f}{L}}} \tag{5}$$

$$\text{Parámetro rugosidad relativa } r = \frac{\xi}{D} \tag{6}$$

Mediante dicha gráfica se puede resolver en forma directa el valor de la velocidad requerida del fluido, para una caída de presión y diámetro de tubería dados, puesto que la variable es la que aparece en la ordenada de la gráfica modificada.

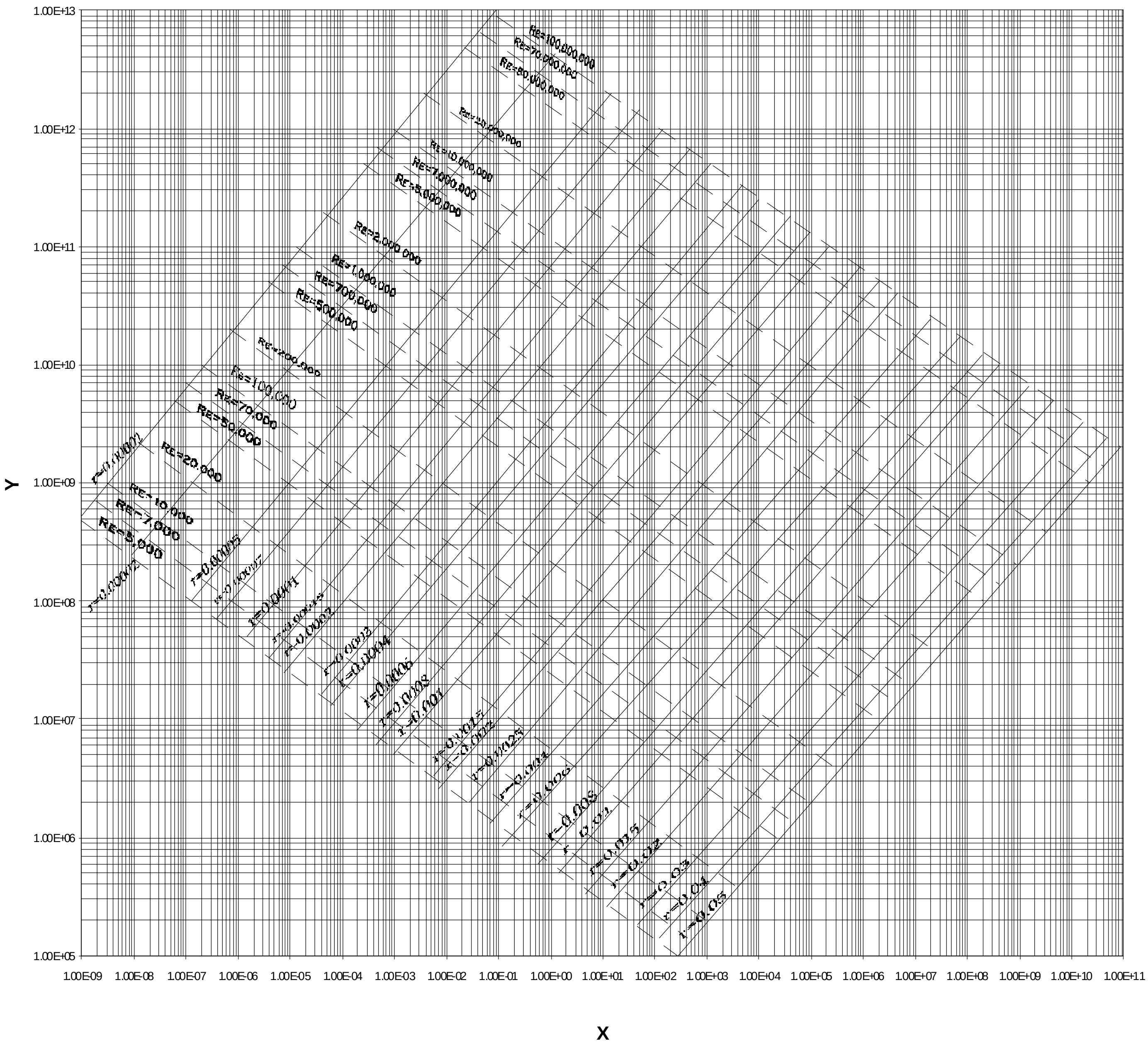
Determinación del diámetro de la tubería

Para la solución del *tercer tipo* de problema, la determinación del diámetro de la tubería requerida, para una velocidad y caída de presión dadas no se puede resolver en forma directa con la gráfica convencional de Moody puesto que la incógnita, en este caso el diámetro, aparece tanto en la abscisa, ordenada y el parámetro de la gráfica. Se requiere una solución de tipo iterativo. Ocurre lo mismo si se intenta con la gráfica de Kármán.

Combinando en forma conveniente los grupos adimensionales Re, f' y r, se obtienen los siguientes grupos:

$$f' \text{Re}^2 r^3 = \frac{2gh_f D}{v^2 L}\left(\frac{dv\rho}{\mu}\right)^2 \left(\frac{\xi}{D}\right)^3 = \frac{2gh_f \rho^2 \xi^3}{L\mu^2} = X\text{(abscisas)} \tag{7}$$

Facultad de Química, UNAM



Gráfica 1. Gráfica de Moody modificada.

$$\frac{\mathrm{Re}}{r}=\frac{d\nu\rho}{\mu}\cdot\frac{1}{\frac{\xi}{d}}=Y \text{ (ordenada)} \tag{8}$$

pero, puesto que $Q(\text{gasto})=\frac{\pi}{4}D^2\cdot\nu$ (9)

$$\frac{\mathrm{Re}}{r}=\frac{4\rho Q}{\pi\xi\mu}=Y\text{(ordenada)} \tag{10}$$

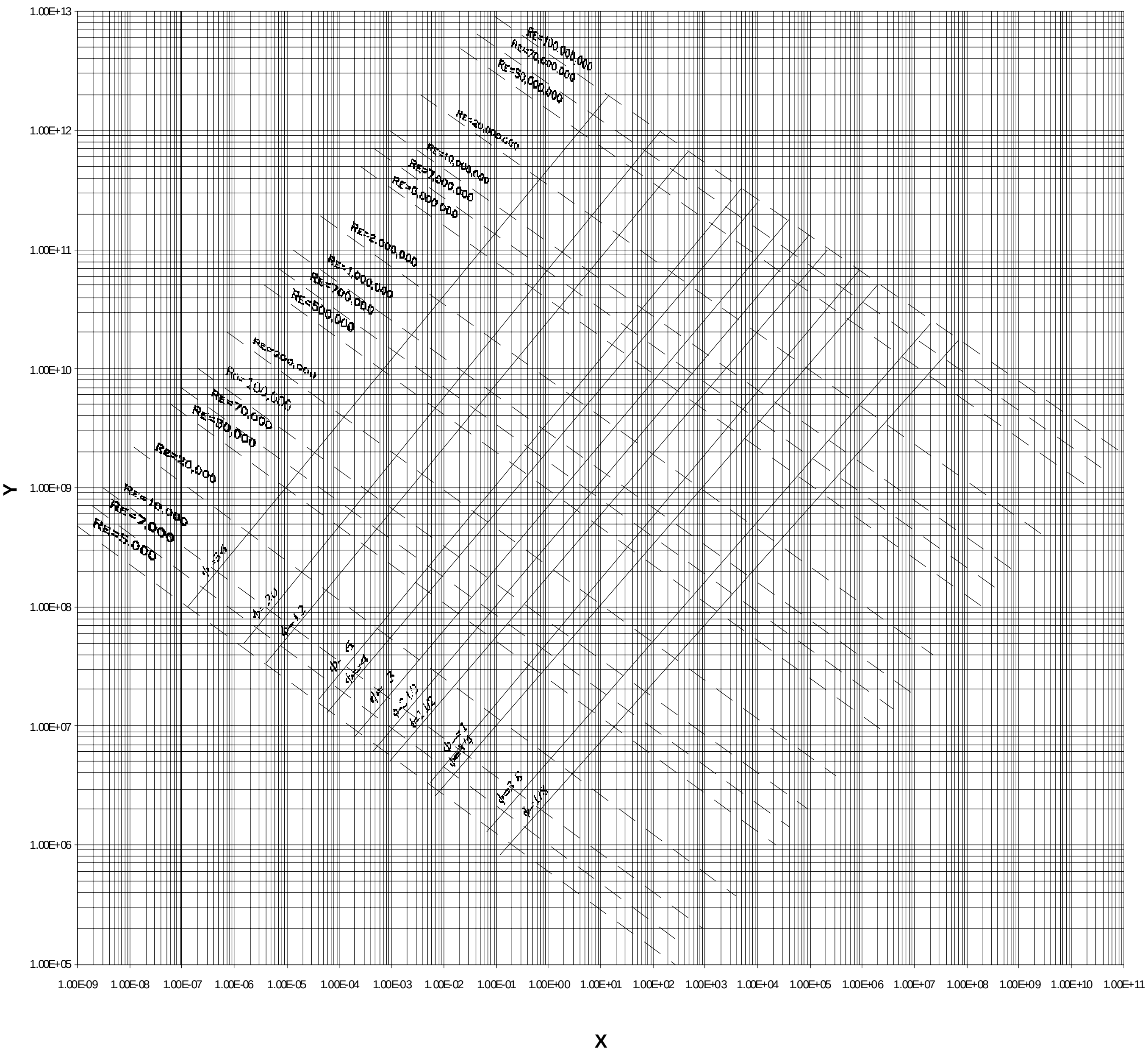
rugosidad relativa $r=\frac{\xi}{D}$ (parámetro) (11)

De esta forma aparece la incógnita (el diámetro) únicamente en el parámetro rugosidad relativa.

La gráfica 1 (Ramalho *et al.*, 1964) permite la solución de este tipo de problemas en forma directa, construida con base en la gráfica convencional de Moody, que a su vez está basada en la siguiente ecuación de Colebrook (1938):

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=-2.0\log\left[\frac{\xi}{3.7D}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right] \tag{12}$$

Una ventaja adicional de la gráfica modificada es que en ella las tres variables (velocidad o flujo caída de presión y



Gráfica 2. Gráfica de Moody modificada (aplicación para tubería de acero comercial cédula 40).

diámetro) están separadas, permitiendo una solución directa para los tres tipos de problemas descritos.

Es frecuente mencionar que, en algunos casos, la solución del problema del cálculo del diámetro de la tubería para un flujo y caída de presión dados puede resultar en un valor numérico del diámetro cuyo valor no coincida con la correspondiente a tuberías comerciales. En este caso, el valor del diámetro se ajustará al más próximo de tipo comercial disponible.

Adicionalmente se preparó la gráfica 2 para obtener directamente el diámetro interior de la tubería de acero comercial, basado en la rugosidad absoluta de este material (0.00015 ft).

Caída de presión recomendadas (ΔP_{100})

Para el cálculo de las dimensiones de la tubería para manejar un flujo dado, se utilizan frecuentemente valores de caída de presión por unidad de longitud, recomendadas. Dichos valores facilita encontrar una combinación razonable de los costos de inversión y de operación del sistema. En la tabla 1 s incluyen algunos valores típicos de dichos criterios de diseño que, mediante el uso de la gráfica modificada, permiten un cálculo de diseño de tuberías en forma rápida.

Elaboración

Para la elaboración de la gráfica es necesario fijar un número de Reynolds y leer de la gráfica de Moody original los valores

Tabla 1. Criterios de ΔP_{100} recomendada (psi/100 ft) (Anaya, 1999).

Líquidos	
Succión de bomba	0.1 a 0.5
Descarga de bomba	1 a 2
Líneas por gravedad	máximo 0.05
Succión de bombas	0.2 a 1
Líquidos saturados	0.1 a 0.5
Líquidos subenfriados	0.2 a 1
Gases	
P < atm	0.05 a 0.25
P < 100 psig	0.25 a 0.5
100 a 1000 psig	0.5 a 2
P < 1000 psig	0.2% de *P* absoluta
Vapor	
Saturado entre 50 y 250 psig	0.5 a 1.5
Saturado entre 250 y 1000 psig	1 a 2
sobrecalentado P < 250 psig	0.25 a 0.5
Sobrecalentado P > 250 psig	0.7% de P absoluta

para f' a diferentes valores de r, con los datos leídos se evalúan las coordenadas de cada punto empleando las ecuaciones 7 y 8 (X,Y) y se marca la línea correspondiente al valor del número de Reynolds dado. De manera similar, se fija un valor de r y se lee de la gráfica los datos de f' para distintos números de Reynolds; una vez evaluadas las coordenadas de los puntos se marca la línea correspondiente al valor de r dado. Si se prefiere, puede usarse la ecuación de Colebrook (12) para evaluar los datos de Re en función de f' fijando como parámetro el valor de ε.

La gráfica original de Moody construida a partir de la ecuación de Colebrook se acepta como estándar debido a la buena precisión de sus datos (Gregory y Fogarasi, 1985). Existen modelos matemáticos como la ecuación Churchill, Moody, Wood, entre otras, que permiten obtener el valor del factor de fricción de manera explícita evitando la necesidad de emplear métodos numéricos para resolverla; tales modelos han sido obtenidos a partir de la ecuación de Colebrook y los resultados obtenidos con éstas pueden tener variaciones con respecto a la ecuación original.

Tabla 2. Nomenclatura.

D,d	Diámetro interno (ft)
ε	Rugosidad absoluta (ft)
f'	Factor de fricción (Darcy)
g	Aceleración de la gravedad (ft · s^{-2})
h_f	Pérdidas por fricción en unidades de altura de líquido ($\frac{\overline{\text{lb}}}{\text{lb}}$ ft)
L	Longitud (ft)
Q	Flujo volumétrico (ft^3 · s^{-1})
r	Rugosidad relativa (adimensional)
Re	Número de Reynolds (adimensional)
V	Velocidad (ft · s^{-1})
μ	Viscosidad (lb · ft^{-1}s^{-1})
ρ	Densidad (lb · ft^{-3})

Ejemplo

Sea un flujo en tubería de acero comercial de 1 ft^3 · s^{-1} de agua a 60°F, $r = 62.3$ lb · ft^{-3}, $\mu = 1\text{cp} = 6.72 \times 10^{-4}$ lb · ft^{-1}s^{-1}, la caída de presión será de $\Delta P_{100} = 0.59$ psi, $L = 100$ ft. Determine el diámetro de la tubería para estas condiciones.

1) Utilizando la ecuación 10 se obtiene el valor de la ordenada:

$$Y = \frac{4 \times 62.3 \times 1}{3.1416 \times 0.00015 \times 0.000672} \approx 7.86 \times 10^8$$

2) Como h_f está expresado en unidades de altura de líquido,

$$h_f = \frac{1}{62.3}\,\frac{\frac{\overline{\text{lb}}}{\text{in}^2}\,\frac{144\ \text{in}^2}{\text{ft}^2}}{\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}} = 1.364\,\frac{\overline{\text{lb}}}{\text{lb}}\,\text{ft} = \frac{\Delta P}{\rho}$$

Este resultado equivale a una cabeza de 1.364 ft de agua.

Utilizando la ecuación 7 se obtiene la abscisa:

$$X = \frac{2 \times 32.17 \times 1.364 \times 62.3^2 \times 0.00015^3}{100 \times 0.000672^2} \approx 2.54 \times 10^{-2}$$

Finalmente se lee el valor para r en la gráfica y se resuelve la ecuación 11, r es aproximadamente 0.00027, por lo tanto $d = \dfrac{0.00015}{0.00027} = 0.55$ ft equivalente a 6”Ø. Si se compara el resultado con los datos de la B-11b[3]. Flujo de agua en tuberías de acero de cédula 40, se observa que los parámetros para tubería de 6 in (diámetro nominal) se parecen a los obtenidos en el ejemplo usando la gráfica. ◩

Bibliografía

Anaya Durand, A. *Curso de diseño de tuberías*. Bufete Industrial S.A., 1999.

Colebrook, C. F., *J. Inst. Civil Engrs.* (London), 11, 133 1938).

Crane, *Flujo de fluidos*, 1992. Traducido de la primera edición en inglés de FLOW OF FUIDS TECHNICAL PAPER 410, A43.

Moody, L. F., *Trans. Soc. Mech. Engrs.*, 66, 671-684 (1944).

Ramalho, R. S.; Tiller, F. M; Berry Jr., V. J.; New Friction-Factor Chart For Pipe Flow, *Chemical Engineering*, July 20, 1964.

Von Kármán, T., *Nach. Ges: Wiss: Göttingen, Fachgruppe* I, 5, 58-76 (1930). Translated in U.S. Nat Advisory Commission Aero. Tech. Memo 611.

Gregory, G. A.; Maria Fogarasi, Alternate To Standard Friction Factor Equation, *Oil & Gas Journal*, April 1, 1985.