SOBRE PREDECIBILIDAD Y CAOS EN SISTEMAS CLÁSICOS

H. N. Núñez Yépez, [1] A. L. Salas Brito, [2]

C. A. Vargas [3] y L. Vicente [4]

Difusa es la barrera entre una revisión de la investigación sobre un tema especializado y una contribución para la actualización de la docencia. En el tren del desarrollo científico, tal vez el primer paso que se da después de uno o varios descubrimientos sea el de su sistematización en forma de un artículo de revisión. De allí a su utilización en el proceso docente hay sólo un paso más. Esta sección PROFESORES AL DÍA recoge artículos de revisión de la frontera del conocimiento, escritos de tal forma que su "digestión" no desemboque en "congestión", sino en actualización.

(1) U A M, Unidad Iztapalapa
(2) Instituto de Física de la UNAM, Unidad Cuernavaca
(3) UA M, Unidad Azcapotzalco
(4) Facultad de Química, División de Estudios de Posgrado, UNAM

Recibido: 10 de agosto de 1991
Aceptado: 7 de octubre de 1991

RESUMEN
Se presentan algunas ideas básicas sobre el concepto de caos en sistemas deterministas y se ilustran con ejemplos mecánicos e hidrodinámicos. Se hace notar que estas ideas han tenido un profundo impacto en nuestra concepción sobre la predecibilidad de los fenómenos naturales.

ABSTRACT
Some basic ideas about caotic behaviour in deterministic systems are presented and exemplified by simple mechanical and hydrodynamical systems. We emphasize how these ideas have changed our conception about the predictability of natural phenomena.

1. INTRODUCCIÓN

Escribía el gran científico francés Pierre Simon de Laplace en 1776:

"Debemos considerar el estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del que seguirá. Una inteligencia que por un instante conociera todas las fuerzas de las que está animada la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen, y si además fuera lo suficientemente vasta para someter estos datos al análisis, comprendería en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y del más ligero de los átomos: nada sería incierto para ella y tanto el futuro como el pasado estarían presentes delante de sus ojos. El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido darle a la Astronomía, un ligero esbozo de esta inteligencia. Sus descubrimientos en mecánica y geometría, junto con la gravitación universal, lo han puesto al alcance de abarcar en las mismas expresiones analíticas todos los estados, presentes y futuros, del sistema del mundo."

El pensamiento anterior expresa admirablemente las ideas que sobre la evolución de los acontecimientos del universo se tenían durante la cumbre del determinismo clásico: dadas la posición y la velocidad de cada partícula en el universo, se podría predecir para siempre su comportamiento futuro y también conocer su pasado, con el único expediente de resolver previamente sus ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Newton); lo que, se pensaba, podría en algunos casos ser un problema difícil, pero nunca imposible. Pero, el ideal del determinismo laplaciano no tomaba en consideración la enorme cantidad de fenómenos que ocurren cotidianamente y que parecen depender únicamente de la casualidad; por ejemplo, los resultados de un juego de azar (nadie ha podido, y para ser sinceros nadie ha intentado seriamente, predecir hacia dónde caerá la cara de la moneda al lanzar un volado), o la trayectoria de una hoja arrastrada por el viento, o infinidad de otros fenómenos cotidianos.

Por otra parte, los fundamentos de la Termodinámica se encuentran en, precisamente, la idea opuesta: la suposición de que los eventos que ocurren a escala atómica no están gobernados mas que por el azar (hipótesis del desorden molecular de Boltzmann); sin esta idea no se habría podido desarrollar la Mecánica Estadística y, por lo tanto, tampoco se habría podido fundamentar la Termodinámica. Entonces, junto a sistemas que siempre se han considerado aleatorios (como los dados o la ruleta), a pesar de conocerse la existencia de ecuaciones del movimiento completamente deterministas, encontramos otros a los que se ha considerado predecibles y a los que se ha dedicado un gran esfuerzo para predecirlos, a pesar de los sistemáticos fracasos al intentarlo. Buen ejemplo de ello son los esfuerzos invertidos para pronosticar el clima a mediano plazo, donde es imposible responder a preguntas como ¿lloverá en Mérida dentro de cuatro meses a las 17:00 horas en punto? Estos esfuerzos infructuosos han convencido gradualmente a mucha gente de la futilidad de estas aspiraciones; si no, ¿porqué no tratar de predecir un resultado en la ruleta? A final de cuentas sus ecuaciones de movimiento se ven más fáciles que las del clima. Pareciera ser entonces que mucho de la distinción que tradicionalmente se hacía entre sistemas azarosos y sistemas predecibles, reflejaba más un punto de vista subjetivo que una distinción profunda.

El siglo XX ha presenciado la caída del determinismo en dos terrenos diferentes. Uno de ellos es el de la Mecánica Cuántica, que es una teoría en la que muchas de sus predicciones son de naturaleza probabilística —obviamente, no se puede criticar a Laplace por no haber anticipado el advenimiento de la revolución cuántica. Sin embargo, el otro de los frentes en que se ha presenciado el derrumbe del determinismo ataca directamente al corazón de sus ideas, y ocurre en el terreno mismo de la Mecánica Clásica con todo y sus ecuaciones deterministas. En este campo se ha descubierto que, aunque las ecuaciones de Newton son deterministas en principio, bastan los inevitables errores que se cometen al especificar las condiciones iniciales de un sistema, para que su estado final sea impredecible después de transcurrido un cierto tiempo; esta impredecibilidad es algo inherente a los sistemas mismos y no depende para nada de la suposición de influencias aleatorias externas sobre el movimiento. Con ello se quiere decir que las ecuaciones de Newton admiten *soluciones caóticas*.

Estas ideas se pueden ilustrar fácilmente con un ejemplo: pensemos en el movimiento de un fluido, como el agua que sale de un grifo; a pequeñas velocidades de flujo el movimiento es estacionario y bastante regular, se le llama entonces flujo laminar, pero si se aumenta la velocidad, el flujo puede pasar a otro régimen, conocido como turbulento, donde el conocimiento de la velocidad del fluido en una posición y en un instante de tiempo determinados no permite predecir lo que pasará en un instante posterior. Este es un buen ejemplo de una transición de un movimiento regular a uno *caótico* que, por cierto, también se puede observar en la columna de humo que asciende de un cigarrillo encendido.* Alguien podría argüir que la diferencia en comportamientos entre, por ejemplo, un fluido y el movimiento de una partícula, proviene exclusivamente de una razón cuantitativa: hay muchos más grados de libertad involucrados en el movimiento del fluido que en el movimiento de la partícula; así, la aparente irregularidad en el movimiento de aquél se debería exclusivamente a la dificultad de seguir con detalle el movimiento de muchísimas partículas ($\sim 10^{23}$); en un razonamiento análogo se puede encontrar el germen de la teoría de Landau, hoy abandonada, sobre el origen de la turbulencia. Debemos dejar en claro, que ésta no es una explicación enteramente satisfactoria ya que movimientos con características estocásticas pueden encontrarse en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias en sólo *tres* variables (Bergé *et al.* 1984), o 1.5 grados de libertad, como a veces se les describe. Ello muestra que no se requiere gran cantidad de variables para producir comportamiento caótico.

Debemos mencionar que muchas de las ideas básicas de esta "nueva" ciencia del caos no son realmente muy recientes, muchas estaban en posesión de Henri Poincaré a finales del siglo XIX, pero el enorme interés en ellas data apenas de hace 25 años, y en mucho se debe a la introducción de computadoras fácilmente asequibles, ya que permiten experimentar con la solución de sistemas de ecuaciones no lineales en diversas situaciones. Por cierto que, en su uso actual, el vocablo *caos* fue usado por vez primera en un famoso trabajo de Li y Yorke (1975).

En este artículo presentamos una introducción a las ideas más relevantes a la noción de caos en sistemas clásicos; esto es, aquéllos cuya evolución está gobernada por las ecuaciones de la Física Clásica. En el próximo número de *Educación Química* analizaremos la abundante aplicación de estas ideas a sistemas químicos; como ejemplos anticipados de ello podemos mencionar las reacciones químicas oscilantes (la hermosa reacción de Belousov-Zabotinski es una excelente ilustración), o las oscilaciones de concentración que ocurren en sistemas donde una sal se disuelve en un líquido pero en condiciones alejadas del equilibrio (Vidal y Pacault, 1984).

2. Caos determinista

El término *caos determinista* denota al movimiento irregular y aparentemente azaroso (en una palabra, caótico) que es generado por sistemas cuyas ecuaciones de movimiento son, sin embargo, deterministas. El único requisito —necesario, mas no suficiente— que deben cumplir

* Hacemos notar la diferencia entre caos y turbulencia: caos implica un comportamiento irregular únicamente en el tiempo; en la turbulencia hay irregularidades tanto espaciales como temporales.

éstas es el de ser ecuaciones de evolución no lineales. Las ecuaciones se dicen deterministas cuando determinan de manera única la evolución en el tiempo del estado de un sistema a partir del conocimiento de su historia previa. El caos dinámico es producido por una *enorme sensibilidad* de esta evolución, a las condiciones iniciales del sistema. De esta forma, aunque las ecuaciones determinen unívocamente el futuro, éste se vuelve efectivamente imposible de conocer.

Para introducir algo de terminología, pensemos en un ejemplo bien conocido: el péndulo. Si conocemos su frecuencia y la magnitud de la fuerza externa que lo mantiene en movimiento (producida, por ejemplo, por el mecanismo de escape de un reloj), su estado queda determinado completamente si se conocen el ángulo θ que forma con la vertical y la velocidad angular $\dot{\theta}$ (figura 1a). Estas variables pueden usarse como coordenadas en el llamado *espacio de fases* del péndulo. A medida que el péndulo se balancea, el punto que representa su estado se mueve a lo largo de una órbita en el espacio de fases. Así, un péndulo que se mueva libremente (esto es, cuando la fuerza externa vale cero) llegará eventualmente a detenerse en un momento del futuro debido a la fuerza de fricción, es decir, se quedará quieto en su punto de equilibrio estable: la órbita en el espacio de fases se acercará gradualmente al origen siguiendo una trayectoria espiral, el origen se comporta así como un punto fijo o punto de equilibrio estable en la dinámica del péndulo (figura 1a) al que todas las trayectorias convergen. Por ello, al origen se le llama también un *atractor* ya que parece atraer a las órbitas en el espacio de fases.

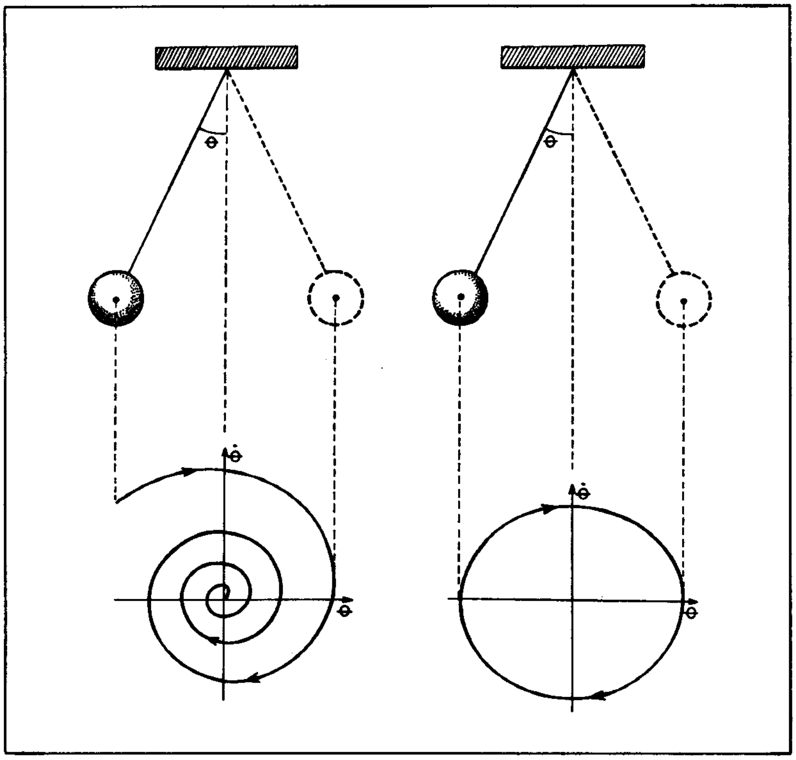


Figura 1. Movimiento en un espacio de fases para un péndulo simple. a) Un péndulo sujeto a la fuerza de fricción se detiene eventualmente en su punto de equilibrio estable, el que actúa como un atractor del tipo punto fijo; b) Si el péndulo es forzado a mantener su movimiento proporcionándole energía externamente, describirá eventualmente una elipse en el espacio $\dot{\theta}$ vs θ, esta elipse actúa como atractor del tipo ciclo límite.

Nótese que ésta situación es muy diferente a la de un péndulo forzado a mantener su movimiento (figura 1b) en donde, debido al mecanismo que le proporciona energía continuamente para reponer la disipada, el péndulo será capaz de oscilar en forma estacionaria y a un ritmo predeterminado. En este caso, un empujón dado inicialmente al péndulo lo pondrá a oscilar en una forma que lo llevará eventualmente a una trayectoria elíptica única alrededor del origen. Este movimiento estacionario al cual llega el sistema es otro ejemplo de un atractor. Hay que notar que el término atractor da la idea que muchas órbitas cercanas convergen hacia él. Al conjunto de condiciones iniciales en el espacio de fases que conducen eventualmente al atractor se le conoce como la *cuenca de atracción* de aquél.

Los ejemplos que hemos mencionado en los casos anteriores ilustran dos tipos de atractores, el *punto fijo estable* y el *ciclo límite estable*, respectivamente. Durante mucho tiempo se creyó que esos atractores, más el llamado atractor multiperiódico en que el atractor corresponde a un toro (un toro es un conjunto con forma de rosquilla) en el espacio de fases, representaban todas las posibilidades para el comportamiento asintótico (*i.e.* el tipo de movimiento al que se llega después de transcurrido mucho tiempo de haberse iniciado) de la dinámica de un sistema. Existen, sin embargo, atractores más complicados llamados *atractores extraños*. Estos atractores capturan las soluciones de un sistema determinista en una región muy bien definida del espacio de fases, donde hay una estructura autosimilar muy compleja con infinidad de dobleces y subestructuras, por lo que el movimiento muestra características asociadas usualmente con la aleatoreidad. ¡Estos atractores son entonces caóticos! La compleja estructura de los atractores extraños hace que se les deba describir usando conceptos de la geometría *fractal* (Feder, 1988; Irazoque y Talanquer, 1991). Por cierto, que un péndulo puede también mostrar comportamiento caótico; basta para ello hacer oscilar sinusoidalmente a su punto de sujeción. En estas condiciones el péndulo podrá oscilar locamente su trayectoria, capturada por un atractor extraño, sin ningún resto de su anterior comportamiento periódico.

Toda nuestra presentación se ha basado hasta el momento en un sistema disipativo, el péndulo con fricción; pero la existencia de fuerzas de roce no tiene que ver forzosamente con la aparición de caos —aunque es fundamental para la existencia de atractores en la dinámica, lo que indica que sólo en sistemas disipativos pueden existir los atractores extraños. El caos puede estar presente también en muchos sistemas conservativos, como es el caso en el célebre problema de los tres cuerpos (Gutzwiller 1990), en el movimiento de un péndulo doble, o en el caso de un péndulo extensible sin fricción (Núñez-Yépez *et al.* 1990).

3. Ejemplos de sistemas caóticos

3.1 Mapeo de Hénon, mapeo logístico y sistema de Lorenz

Mucha de la intuición necesaria para entender el comportamiento caótico puede ganarse de programar el comportamiento de sistemas que lo muestran; por ello esperamos que los lectores lo hagan usando los ejemplos que presentaremos en esta sección. Para ilustrar los conceptos de la sección 2, hemos seleccionado un sistema discreto, *i.e.* cuya dinámica no se describe mediante ecuaciones diferenciales como quedaba implícito en nuestra descripción anterior, sino por ecuaciones en diferencias: el llamado sistema de Hénon. Ello ofrece una gran ventaja si se desea programar su evolución. Las dos ecuaciones que describen al sistema de Hénon (Hénon 1976) son:

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2$$
$$y_{n+1} = bx_n \qquad (1)$$

los parámetros a y b se mantienen fijos durante la evolución del sistema. Nótese que el índice n juega el papel de un tiempo discreto y que el espacio de fases del sistema es bidimensional (componentes y_n y x_n). Si usan los valores $a = 1.3$ y $b = 0.3$, en (1), casi cualquier condición inicial que elijan los llevará, después de unas cuantas iteraciones, a un atractor periódico: un conjunto de 7 puntos que se visitan en sucesión (figura 2a); si, haciendo un pequeño cambio en los parámetros, se eligen $a = 1.4$ y $b = 0.3$, la evolución del sistema los llevará a un atractor extraño: el atractor de Hénon (figura 2b).

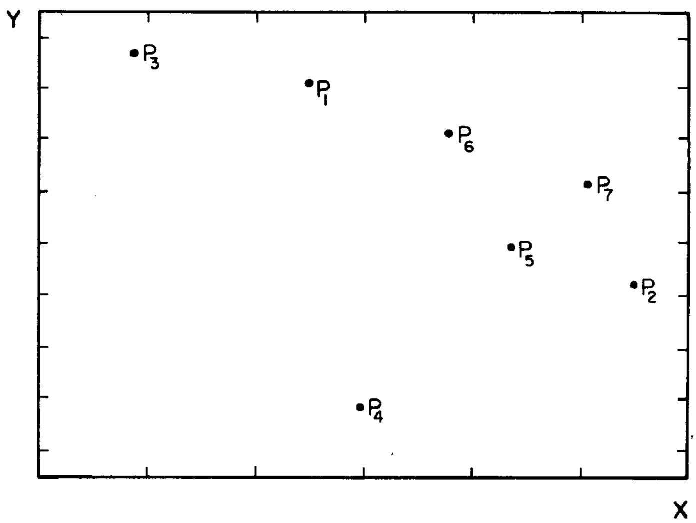
Este sistema de ecuaciones, o *mapeo*, describe un sistema disipativo que se puede usar como modelo para la dinámica de una llave que gotea. El sistema de Hénon es, por otra parte, una generalización de otro mapeo que ha sido determinante en el interés contemporáneo por los sistemas caóticos, el mapeo logístico. Para obtener una versión de él a partir de las ecuaciones (1), basta tomar $b = 0$ y usar como condición inicial $y_0 = 0$; con esto se obtiene el esquema de iteración unidimensional

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 \qquad (2)$$

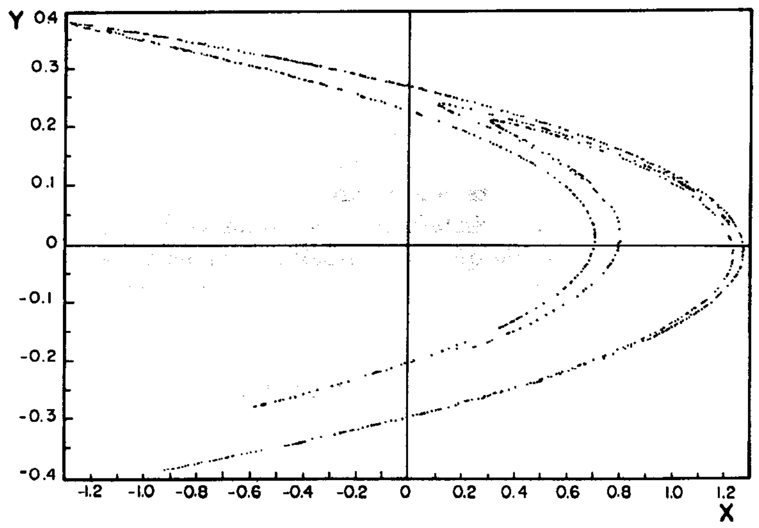
Hacemos notar que la forma más común en que se presenta el mapeo logístico, *i.e.*

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \qquad (3)$$

es topológicamente equivalente a la forma anterior. El mapeo logístico puede considerarse como un mo-



(*a*)



(*b*)

Figura 2. El sistema de Hénon. a) Atractor periódico; b) Atractor extraño.

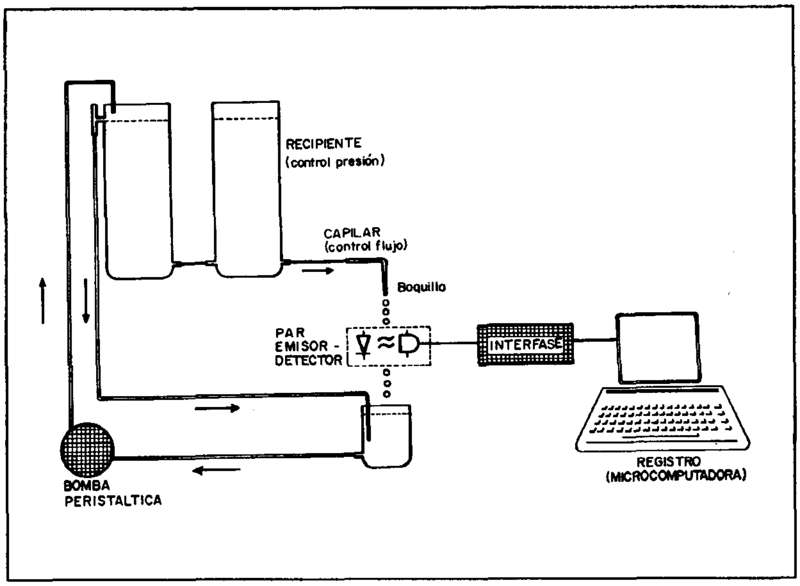


Figura 3. Diagrama de bifurcaciones para el mapeo logístico. Éste se obtiene graficando el comportamiento asintótico (valores de n mayores que, digamos, 300 para eliminar transitorios) de la ecuación (2) como función de a.

delo para la dinámica de poblaciones de insectos cuyas generaciones nunca se superponen (May, 1976). La dinámica del sistema se transforma de periódica a múltiplemente periódica, y finalmente a caótica, al variar el parámetro a, como puede observarse en la figura 3, la que ilustra el *diagrama de bifurcaciones* para el mapeo (2). Es notable que en la dinámica de este mapeo tan "simple" se encuentren los fundamentos de muchas de las ideas y aplicaciones del caos a la física, la química y la biología. Ello se debe a que es posible demostrar que muchas de sus propiedades son *universales* y las comparten una gran

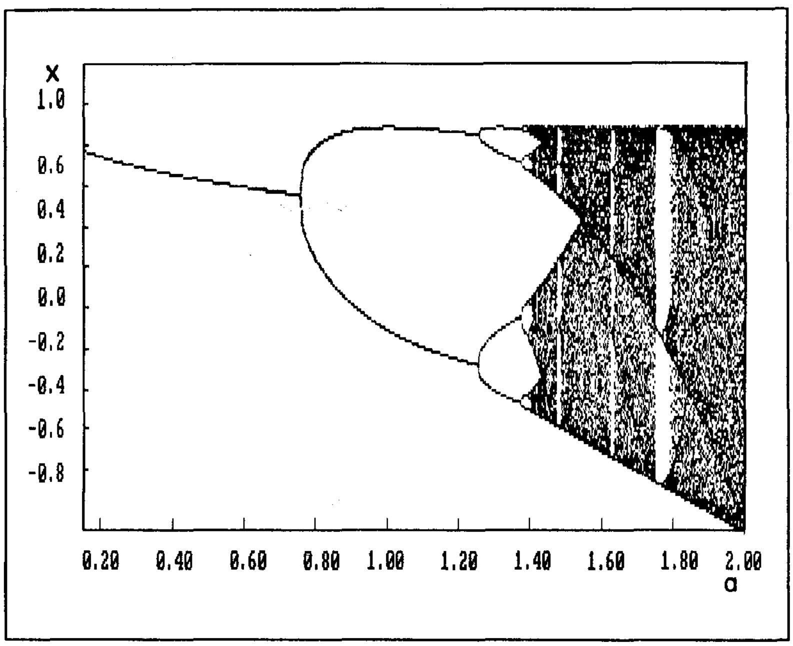


Figura 4. Diagrama esquemático del experimento del goteo.

variedad de sistemas, tanto continuos como discretos y, lo más sorprendente, tanto unidimensionales como multidimensionales.

Es importante hacer notar que el caos puede aparecer en un mapeo unidimensional, pero *nunca* en una ecuación diferencial unidimensional. Se requieren al menos tres ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas (y, necesariamente, no lineales) para encontrar caos. Un ejemplo de un sistema continuo de este tipo lo contituye el conjunto de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma(x + y) \\ \frac{dy}{dt} &= -xy + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned} \tag{4}$$

al que se conoce como el sistema de Lorenz (Lorenz, 1963).

Este sistema muestra comportamiento caótico cuando se dan a sus parámetros los valores $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = 8/3$. El sistema fue propuesto y estudiado originalmente como una versión muy *simplificada* de las ecuaciones que sirven de base para la predicción del clima. La solución de las ecuaciones anteriores exhibe sensibilidad extrema a las condiciones iniciales *i.e.* es caótica; al no haber otra terminología en su tiempo, Lorenz acuñó el término "efecto mariposa" para describir tal propiedad, pues, según su imagen, bastaría la perturbación causada por el aleteo de una mariposa para cambiar completamente el resultado final de una predicción basada en (4).

3.2 Caos en una llave que gotea

El siguiente experimento ilustrará algo más sobre la ubicuidad del caos y sobre el uso de conceptos tomados de la teoría de los sistemas dinámicos. Consideremos una llave que gotea y fijémonos en el intervalo de tiempo que transcurre entre dos gotas sucesivas. Por supuesto que si la llave no permite un control muy fino, al ir abriéndola pasaremos de observar una cuantas gotas a un chorro de agua. Posiblemente tampoco será suficiente un cronómetro para medir el tiempo entre cada par de gotas sucesivas, pero cualitativamente nos podemos dar cuenta que los intervalos de tiempo cambian, si ponemos, por ejemplo, una tapa metálica bajo la llave y escuchamos el ritmo del goteo. Para aberturas (flujos) pequeños de la llave, el ruido al gotear será regular, pero al ir aumentando el flujo comenzaremos a escuchar el golpeteo de manera más y más irregular. ¿Qué es lo que sucede?

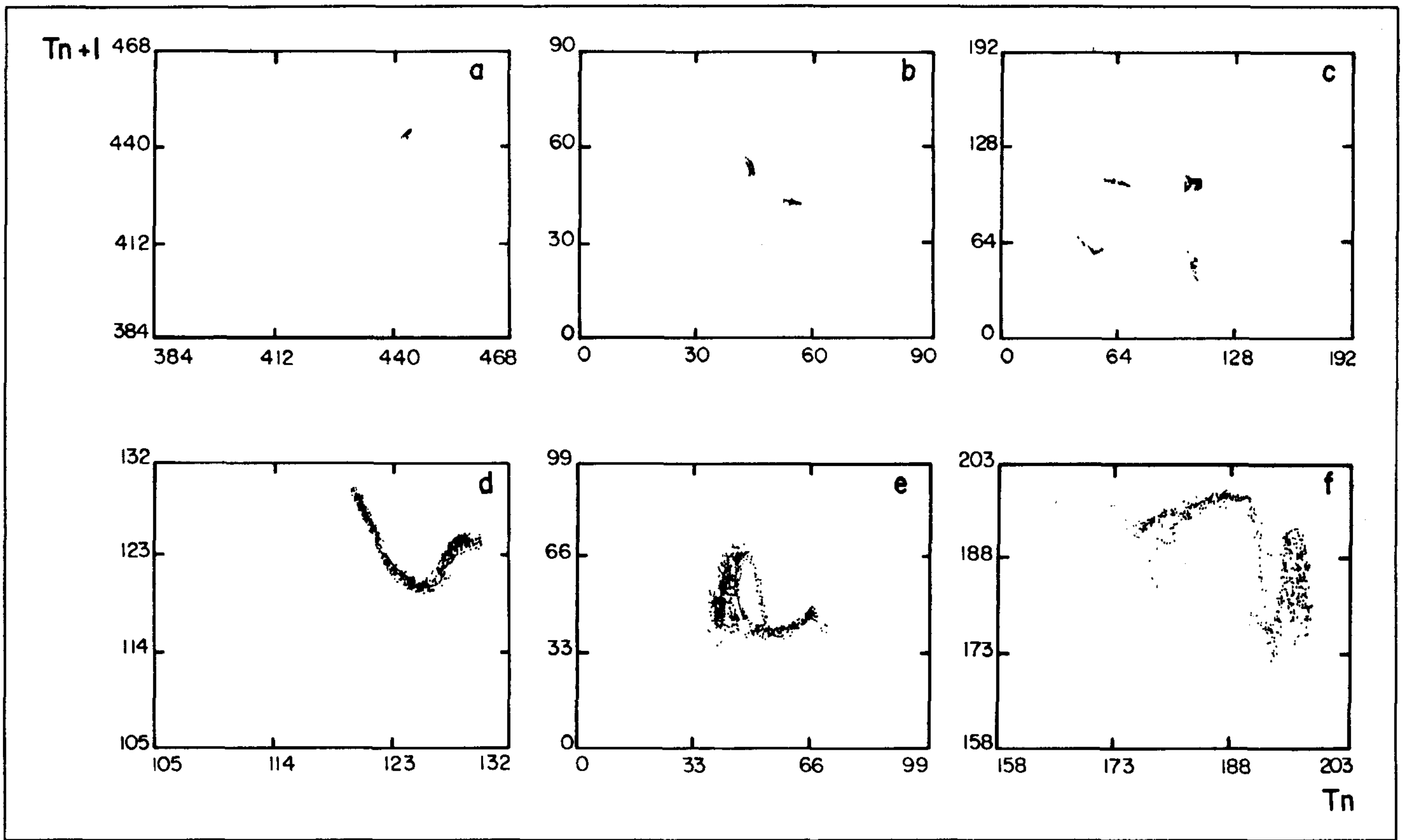


Figura 5. Gráficas de T_{n+1} vs T_n que ilustran la dinámica de una llave que gotea. a-c) Muestran comportamiento regular; d-f) Muestran atractores extraños.

Afortunadamente se pueden hacer mediciones precisas usando algunos elementos electrónicos. Por ejemplo, usando un optoacoplador que produce un pulso cada vez que pasa una gota y que envía la correspondiente señal a una computadora —los detalles de este experimento, que se puede realizar en un laboratorio docente, se pueden encontrar en Núñez-Yépez *et al.* (1989). La figura 4 muestra esquemáticamente un dispositivo experimental que permite medir de manera precisa el intervalo de tiempo entre dos gotas sucesivas, al que llamaremos T_n, donde n es el orden de aparición de la gota. Armados con esta sucesión de datos, podremos visualizar la dinámica del sistema estudiando el comportamiento de éste en un espacio de fases (reconstruido) con coordenadas T_{n+1} y T_n. La figura 5 muestra los resultados obtenidos al graficar T_{n+1} vs T_n. Para valores pequeños del flujo la gráfica es sólo un punto (figura 5a), ya que el flujo es absolutamente regular y el intervalo de tiempo entre gotas sucesivas es siempre el mismo. Al ir aumentando el flujo, el diagrama se modifica (figuras 5b, 5c), pues aparecen dos puntos, cuatro puntos, etcétera. Lo anterior indica que el tiempo entre gotas sucesivas ya no es el mismo; sin embargo, la dinámica es regular y el sistema cae rápidamente en un atractor periódico.

Pero, antes de que se produzca un chorro de agua, se obtiene una figura como la 5d, que corresponde a un atractor extraño; las figuras 5e y 5f muestran otros ejemplos de atractores del sistema, que de esta forma se vuelve caótico. Se diría que al abrir gradualmente la llave el sistema llega, *bifurcándose* sucesivamente, desde un atractor estable periódico hasta un estado caótico donde ocurren atractores extraños.

La ruta que lleva al sistema al caos es, en realidad, mucho más compleja que lo que indica esta sucinta descripción. Sin embargo, esperamos que este ejemplo, más realista que los anteriores, haya ilustrado cómo un sistema no lineal puede volverse caótico al hacer variar un parámetro externo de control.

4. El caos y la ciencia actual

El "caólogo" dispone de varias herramientas para identificar el comportamiento del sistema que estudia, como el estudio del espectro de frecuencias, de los llamados exponentes de Liapunov (los que miden precisamente la sensibilidad a pequeños cambios en las condiciones iniciales), de la dimensión fractal de los atractores, etcétera. Esperamos abordar estas ideas en una contribución futura; entretanto, los libros de Bergé, Pomeau y Vidal (1984) y Schuster (1988) son magníficas referencias para los no especialistas, pero con formación científica. Como dato histórico puede ser interesante acotar que la existencia de una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales en sistemas de ecuaciones diferenciales, ya había sido notada por Hadamard y Poincaré a principios de este siglo (Ruelle 1989), pero pasó inadvertida para la gran mayoría de los científicos por los siguientes 60 años. El redescubrimiento de esta propiedad hace unos 30 años se debió a la disponibilidad de computadoras que permitieron seguir paso por paso la solución de ecuaciones diferenciales (los trabajos de Lorenz, 1963, y Hénon y Heiles, 1964, fueron decisivos). Además el contar con gráficos rápidos en esas computadoras permite observar estructuras que de otra manera uno no se imaginaría que están ahí.

El problema del caos también ha entrado en la mecánica cuántica (Gutzwiller, 1990), aunque el significado preciso del término caos cuántico aún se encuentra en discusión, pues lo que es claro es que no puede existir caos del tipo clásico en problemas cuánticos; ello debido a la linealidad fundamental de las ecuaciones de la mecánica cuántica. Cálculos recientes han mostrado que la naturaleza caótica o regular de la dinámica clásica de un sistema ligado se manifiesta en las propiedades estadísticas del espectro de niveles de energía. Estos fenómenos se empiezan a explicar representando los espectros en términos de órbitas clásicas periódicas. Pero una explicación de estos temas cae ya fuera del objetivo de este trabajo.

Resumiendo, en la actualidad una de las direcciones de investigación más importantes es la aplicación sistemática de las ideas y técnicas de los sistemas no lineales a muchas clases de sistemas, incluyendo a los biológicos e incluso en las ciencias sociales y la economía (Krasner, 1990). Por ello creemos que estar familiarizado con las ideas básicas en este campo es fundamental para la cultura científica general de nuestro tiempo. ✍

REFERENCIAS

Bergé P. Pomeau Y. y Vidal Ch., *L'ordre dans le chaos*, Herman, Paris, 1984.

Feder, J., *Fractals*, Plenum Press, Nueva York, 1988.

Gutzwiller M.C., *Chaos in classical and quantum mechanics*, Springer—Verlag, Berlín, 1990.

Hénon M. y Heiles C., The applicability of the third integral of the motion: some numerical results, *Astron. J.*, **69**, 73, 1964.

Hénon M., A two dimensional map with a strange attractor, *Commun. Math. Phys.* **50**, 69, 1976.

Irazoque G. y Talanquer V., Fractales, *Eduq. quím.*, **2**, 114, 1991.

Krasner S. editor, *The ubiquity of chaos*, AAAS, Washington, 1990.

Laplace P. S., de *Essai philosophique sur les probabilités*, 1a. edición 1776, reimpresión de 1921: Gauthier—Villars, París, p. 3.

Li T.Y. y Yorke J.A., Period three implies chaos, *Am. Math. Monthly*, **82**, 985, 1975.

Lorenz E.N., Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130, 1963.

May R.M., Simple systems with very complicated dynamics, *Nature*, **261**, 1976.

Núñez-Yépez H.N., Salas-Brito A.L., Vargas C. A. y Vicente L., Chaos in a dripping faucet, *Eur. J. Phys.*, **10**, 99, 1989.

Núñez-Yépez H. N., Salas-Brito A.L., Vargas C. A. y Vicente L., Onset of chaos in an extensible pendulum, *Phys. Lett. A*, **164**, 101, 1990.

Ruelle D., *Chaotic evolution and strange attractors*, Accademia Nazionale dei Lincei/Cambridge University Press, Londres, 1989.

Schuster H.G., *Deterministic chaos*, 2da. edición, VCH, Berlín, 1988.

Vidal C. y Pacault A. editores, *Non-equilibrium dynamics in chemical systems*, Springer-Verlag, Berlín, 1984.