

# El método de McCabe-Thiele según lo impartía el maestro Estanislao Ramírez

Alberto Urbina del Raso\*

## Introducción

El trabajo "Graphical Design of Fractionating Columns" fue presentado por sus autores W.L. McCabe y E. W. Thiele ante la American Chemical Society en abril de 1925 y publicado en la revista *Industrial and Engineering Chemistry* en junio del mismo año.

El original presenta un nuevo método más sencillo, más rápido y más ilustrativo para calcular gráficamente el número de platos teóricos necesarios para la separación de los componentes de una mezcla binaria en una columna de rectificación.

Comentar el trabajo de McCabe y Thiele, en que presentan un método de cálculo que es ya clásico y conocido por todos los estudiantes de Ingeniería Química resultaría difícil, y un tanto redundante.

Sin embargo, como el objetivo de los autores fue la presentación del nuevo método de cálculo sin ninguna intención docente, dan por conocidos algunos principios fundamentales de la rectificación y omiten algunas deducciones. Resulta interesante presentar en este trabajo la forma como nos lo enseñaba el Maestro Estanislao Ramírez, allá por el año de 1929.

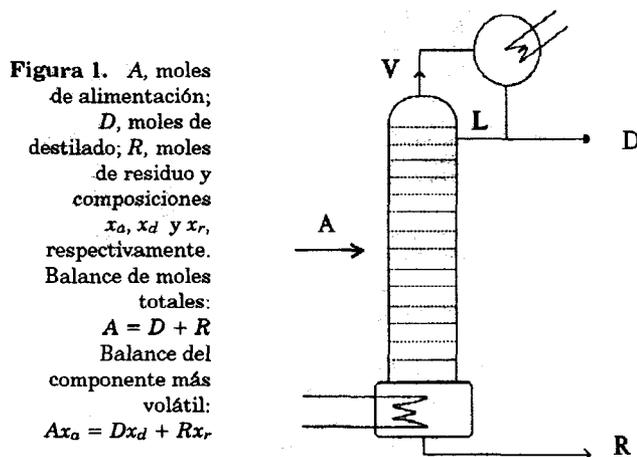
En principio se trata de separar por destilación una mezcla binaria de componentes volátiles en dos fracciones, una más rica y la otra más pobre, en el componente más volátil. Teóricamente pueden obtenerse fracciones tan puras como sea necesario sin llegar a una separación completa.

Lo primero es hacer el balance global del proceso. Las cantidades se medirán en moles por unidad de tiempo y las composiciones en fracción mol del componente más volátil,  $x$  para el líquido y  $y$  para el vapor.

En el pie de la Figura 1 se tiene un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo que es necesario fijar una base de cálculo. Arbitrariamente se toma una

*Educación Química* agradece al ingeniero Alejandro Anaya Durand el envío del artículo original de McCabe y Thiele, así como al autor la síntesis didáctica estupenda que ha elaborado del mismo, de acuerdo con las enseñanzas que recibió del maestro Estanislao Ramírez (hace 60 años!), y que luego ha transmitido, enriquecidas, a tantas generaciones de ingenieros químicos.

\* Profesor Emérito, Facultad de Química, UNAM 04510, México, D.F.



mol de alimentación. Así, al resolver las ecuaciones o aplicar la regla de la palanca, para  $A = 1$ , se tiene

$$R = \frac{x_d - x_a}{x_d - x_r} \quad D = \frac{x_a - x_r}{x_d - x_r}$$

El principio de la rectificación consiste en poner en contacto vapor con un líquido más rico en el componente más volátil que el correspondiente al equilibrio. Al ponerse en contacto, el vapor tenderá a ponerse en equilibrio con el líquido, condensándose parte del componente menos volátil y evaporándose la cantidad equivalente del más volátil.

Repetiendo estos contactos a contracorriente, el vapor se irá enriqueciendo y el líquido empobreciendo, hasta alcanzar las composiciones del destilado y del residuo respectivamente.

Como el proceso consiste en poner en contacto vapor con líquido y a la columna no entra más que la alimentación (normalmente como líquido), el vapor se genera evaporando parte del residuo, y el líquido retornando a la columna parte del destilado, que son las mezclas más pobres y más ricas en el componente más volátil.

Una columna de rectificación consta entonces de un

destilador o hervidor donde se evapora parte del residuo, un condensador donde se obtiene el destilado, parte del cual se retorna a la columna y una serie de platos donde se ponen en contacto el vapor y el líquido, en uno de los cuales se alimenta la mezcla por rectificar (véase la Figura 1).

El método de cálculo consiste en encontrar la relación entre la composición del vapor que se desprende de un plato y la del líquido del plato, y la relación entre la composición del vapor y la del líquido del plato siguiente.

El número de veces que sea necesario aplicar alternativamente las dos relaciones para pasar de la composición del residuo a la del destilado, será el número de platos requeridos para lograr la separación deseada.

Tratándose de calcular el número de platos teóricos o perfectos en los cuales se supone que el vapor está en equilibrio con el líquido, la primera relación es la del equilibrio.

La segunda relación se encuentra, como en otros casos similares, haciendo balances entre un punto cualquiera del equipo y otro punto en que las cantidades y composiciones sean conocidas.

Como la columna de rectificación consta de dos secciones (de enriquecimiento y de agotamiento, véanse las figuras 2 y 3, respectivamente) que operan en diferentes condiciones, es necesario encontrar relaciones para cada una de ellas.

Tanto la relación de equilibrio como las resultantes de los balances en los pies de las figuras 2 y 3 se aplican a los diferentes métodos de cálculo.

En el método de Sorel, además de los balances de materiales, se hacen balances de entalpías para tener en cuenta la variación de  $V$  y  $L$  a través de la columna.

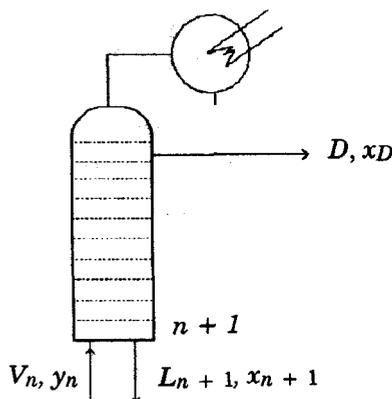


Figura 2. Balances en la sección de enriquecimiento;  $n$  es un plato cualquiera,

$$V_n = L_{n+1} + D$$

$$V_n y_n = L_{n+1} x_{n+1} + D x_d$$

y despejando  $y_n$ , tenemos

$$y_n = \frac{L_{n+1}}{V_n} x_{n+1} + \frac{D}{V_n} x_d$$

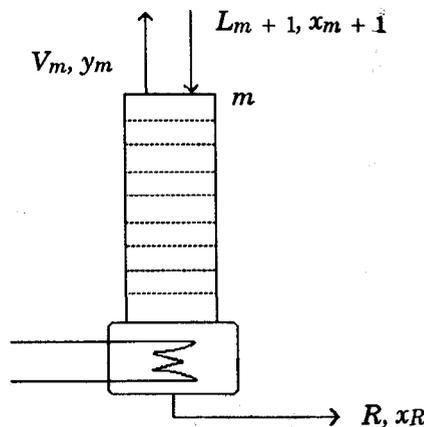


Figura 3. Balance en la sección de agotamiento; llamando  $m$  a un plato cualquiera,

$$V_m = L_{m+1} - R$$

$$V_m y_m = L_{m+1} x_{m+1} - R x_r$$

y despejando  $y_m$ , tenemos

$$y_m = \frac{L_{m+1}}{V_m} x_{m+1} - \frac{R}{V_m} x_r$$

Las composiciones se calculan analíticamente de plato en plato.

En el método de Ponchon-Savarit, las composiciones y el número de platos se encuentran gráficamente en un diagrama entalpía-concentración para el vapor y el líquido, combinado con la relación de equilibrio.

Los otros métodos de cálculo más conocidos, el de Lewis y el de McCabe-Thiele, se aplican en su forma clásica simplificada a una columna ideal, concepto que hay que caracterizar.

Se considera ideal una columna cuando el número de moles de vapor que la atraviesan es constante. Para que  $V$  sea constante se requiere cumplir con ciertas condiciones teóricas importantes:

1. Que las pérdidas de calor en la columna sean pequeñas, es decir, que la cantidad de vapor condensado sea despreciable.

2. Que los componentes sean de naturaleza similar, que no haya calor de mezcla y que sigan la regla de Trouton:  $\lambda M/T = \text{constante}$  ( $\lambda$ , entalpía de evaporación;  $M$ , peso molecular;  $T$ , temperatura absoluta de ebullición).

Esto significa que por cada mol del componente menos volátil que se condense se evaporará una mol del más volátil.

3. Que tanto el destilado retornado a la columna como la alimentación entren a su temperatura de ebullición.

Otra condición para considerar una columna ideal es que las diferencias de presión no afecten la relación de equilibrio, y que la misma sea aplicable en toda la columna.

Con la condición  $V = \text{constante}$ , las relaciones

previas de balance pueden simplificarse como sigue:

$$V = L_n + D = L_m - R$$

de donde

$$L_m = L_n + (R + D) = L_n + 1$$

ya que

$$R + D = A = 1 \quad (1)$$

Además,

$$Dx_d + Rx_r = Ax_a = x_a \quad (2)$$

$$R = \frac{x_d - x_a}{x_d - x_r} \quad (3)$$

$$D = \frac{x_a - x_r}{x_d - x_r} \quad (4)$$

Equilibrio:

$$y = f(x)$$

Sección de enriquecimiento

$$V = L + D \quad (5)$$

$$Vy_n = Lx_{n+1} + Dx_d \quad (6)$$

$$y_n = \frac{L}{V}x_{n+1} + \frac{D}{V}x_d \quad (7)$$

Sección de agotamiento

$$V = (L + 1) - R \quad (8)$$

$$Vy_m = (L + 1)x_{m+1} - Rx_r \quad (9)$$

$$y_m = \frac{(L + 1)}{V}x_{m+1} - \frac{R}{V}x_r \quad (10)$$

**Método de Lewis**

Lewis supone que la composición entre plato y plato varía en una cantidad diferencial.

Para la sección de enriquecimiento

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dx}{dn}$$

$$dn = \frac{dx}{x_{n+1} - x_n}$$

Al combinar las ecuaciones 5 y 6,

$$x_{n+1} = y_n - \frac{D}{L}(x_d - y_n)$$

Lo que puede sustituirse en la ecuación anterior y obtener, por integración el número de platos,

$$n = \int_{x_a}^{x_d} \frac{dx}{y_n - \frac{D}{L}(x_d - y_n) - x_n}$$

análogamente, para la sección de agotamiento

$$m = \int_{x_r}^{x_a} \frac{dx}{y_m - \frac{R}{(L+1)}(y_m - x_r) - x_m}$$

El número de platos se encuentra por integración gráfica dando valores a  $x$  y encontrando los correspondientes valores de  $y$  con la relación  $y = f(x)$  o analíticamente si esta última función puede expresarse en esa forma.

**Método de McCabe y Thiele**

En un diagrama de coordenadas rectangulares  $y-x$  se traza la función  $y = f(x)$  que corresponde a la curva de equilibrio, la línea de  $45^\circ$   $y = x$  y las ecuaciones (7) y (10), que son las líneas de operación.

*Trazo de las líneas de operación*

Línea de enriquecimiento (ecuación 7)

$$y_n = \frac{L}{V}x_{n+1} + \frac{D}{V}x_d$$

puede trazarse la línea conociendo un punto y la pendiente, pero es más ilustrativo conocer el punto en que la línea corta la de  $45^\circ$  y la ordenada al origen.

De la ecuación (6)

$$Vy_n = Lx_{n+1} + Dx_d$$

Sobre la línea de  $45^\circ$

$$y_n = x_{n+1} = x$$

y entonces

$$Vx = Lx + Dx_d$$

de la ecuación (5)

$$V = L + D$$

de donde

$$x = x_d$$

para cualquier valor de  $L/V$ .

De las ecuaciones (7) y (5), la ordenada al origen resulta

$$\frac{D}{V}x_d = \left(1 - \frac{L}{V}\right)x_d$$

es decir que ambas, la ordenada al origen y la pendiente, dependen del valor que se dé a la relación  $L/V$ .

*Línea de agotamiento*

Análogamente, de las ecuaciones 8, 9 y 10 se encuentra que la línea de operación de agotamiento corta la línea de  $45^\circ$  en  $x = x_r$  para cualquier valor de  $L/V$ . El otro punto se encuentra en la intersección de las dos líneas de operación.

En la intersección

$$y_n = y_m = y$$

$$x_n = x_m = x$$

de (6) y (9)

$$Vy_n = Vy_m = Lx + Dx_d = (L + 1)x - Rx_r$$

y entonces

$$Rx_r + Dx_d = x$$

y, de la ecuación 2,

$$x = x_a$$

En el diagrama  $x$ - $y$  se trazan la línea de 45°, la curva de equilibrio y las líneas verticales correspondientes a los valores  $x_r$ ,  $x_a$ , y  $x_d$ .

La línea de enriquecimiento se traza uniendo el punto  $x_d$  sobre la línea de 45° con un punto de la línea  $x_a$  entre la curva de equilibrio y la línea de 45°. La línea de agotamiento se traza uniendo el punto anterior con el punto  $x_r$  sobre la línea de 45° (véase la Figura 4).

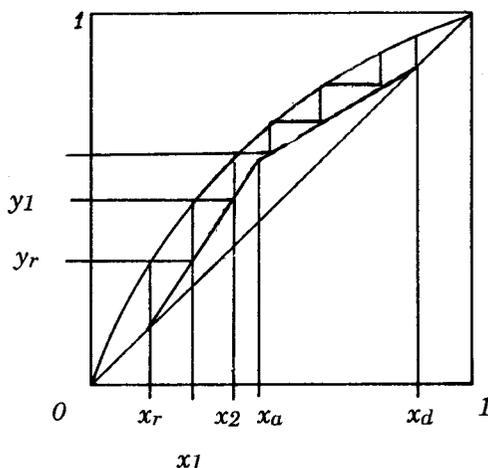


Figura 4. Trazado de las líneas de operación.

El número de platos teóricos se encuentra aplicando alternativamente la curva de equilibrio y las líneas de operación; por ejemplo, empezando con el valor de  $x_r$ , sobre la curva de equilibrio se encuentra  $y_r$ , con este valor sobre la línea de operación se encuentra  $x_1$ , sobre la curva de equilibrio se encuentra  $y_1$ , y sobre la línea de operación  $x_2$ ; se continúa la triangulación hasta llegar a un valor de  $y$  igual o mayor de  $x_d$ . La triangulación puede iniciarse por cualquiera de los valores conocidos  $x_r$ ,  $x_a$  o  $x_d$  recordando que  $x_r$  corresponde al destilador y  $x_d$  al condensador.

#### Selección del valor $L/V$

Como las pendientes de las líneas de operación dependen del valor asignado a  $L/V$  es necesario determinar entre qué límites puede variar.

El valor máximo de  $L/V$  se alcanza cuando se retorne todo el destilado;  $L = V$  y  $L/V$  será igual a 1 (línea de 45°). En estas condiciones la columna opera a reflujo

total, en circuito cerrado sin alimentación, destilado ni residuo. Alcanzado el régimen permanente y de acuerdo con el diagrama, el número de platos sería el mínimo. Teóricamente no puede definirse la cantidad de vapor para trabajar la columna a reflujo total, pero en la práctica sería el mínimo necesario para que los platos operaran a la eficiencia prevista.

Cuando la intersección de las líneas de operación toque la curva de equilibrio (para condiciones ideales en  $x_a$ ) el número de platos sería infinito y el valor de  $L/V$  mínimo (véase la Figura 5). Una columna puede operar físicamente con reflujo menor que el mínimo, pero no se alcanzarían las composiciones  $x_d$  o  $x_r$ . El valor de

$$\left(\frac{L}{V}\right)_{\min} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_d - y_a}{x_d - x_a}$$

El valor de  $L/V$  de operación estará entre el mínimo y 1, es decir

$$\frac{x_d - y_a}{x_d - x_a} < \left(\frac{L}{V}\right)_{\text{op}} < 1$$

Esto significa que, como prácticamente en todos los problemas de ingeniería, desde el punto de vista de la teoría de la rectificación el problema es indeterminado, puesto que cualquier valor de  $L/V$  entre los límites indicados resuelve teóricamente el problema.

El valor adecuado se determina por razones económicas. Tomando como variable independiente el valor de  $L/V$ , de la ecuación (5),

$$V = \frac{D}{1 - \frac{L}{V}}$$

Para  $L/V = 1$ ,  $V$  resulta infinito, y tanto la inversión en el equipo (diámetro infinito) como los costos de operación (vapor y agua de enfriamiento) serían, en el límite, también infinitos. Para  $L/V$  mínimo, el número de platos sería infinito pero  $V$ ,  $L$ , y  $L + 1$  serían mínimos.

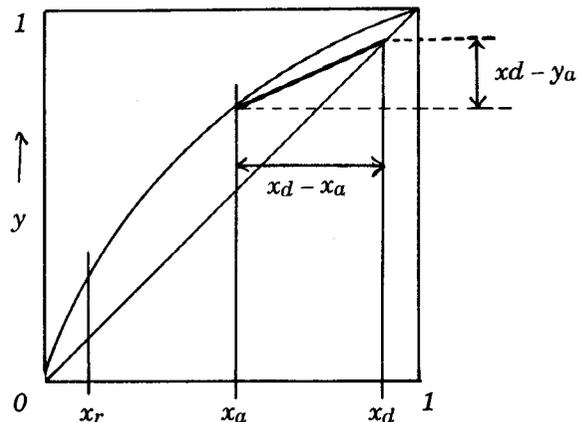


Figura 5. Línea de enriquecimiento para reflujo mínimo.

El mínimo de la suma de los gastos originados por la inversión y los costos de operación quedaría más cerca del valor mínimo que de la unidad.

Tentativamente, un valor adecuado sería

$$\left(\frac{L}{V}\right)_{op} = \left(\frac{L}{V}\right)_{min} + \frac{1}{3} \left[ 1 - \left(\frac{L}{V}\right)_{min} \right]$$

Fijado el valor de  $L/V$  se pueden calcular los valores de  $V$ ,  $L$  y  $(L + 1)$  que, multiplicados por el valor de  $A$  (moles de alimentación por unidad de tiempo) permiten conocer los flujos de vapor y líquido a través de la columna.

Con esto se tiene la información básica para calcular el diámetro de la columna, diseñar los platos y calcular el hervidor y el condensador.

El número de platos reales se encuentra dividiendo el número de platos teóricos entre la eficiencia media de los platos.

El desarrollo anterior se aplica al caso de una columna ideal, pero conociendo los principios de cálculo pueden hacerse los ajustes y correcciones cuando la condición de que  $V$  (las moles de vapor atraviesen la columna por unidad de tiempo) sea constante no se cumpla.

Las desviaciones de la idealidad pueden dividirse en tres:

1. Las que afectan la curva de equilibrio.

2. Las que modifican el valor de  $L/V$  en algún punto de la columna. Con tal de que éste permanezca constante en las secciones de la columna entre estos puntos, la pendiente de las líneas de operación cambiará, pero seguirán siendo rectas.

3. Cuando  $V$  varía a lo largo de la columna, la pendiente  $L/V$  no se mantendría constante y las líneas de operación serían curvas.

Tratar con detalle estos casos haría este trabajo demasiado extenso, de manera que sólo se presentarán los principios básicos para abordarlos.

1. *Curva de equilibrio.* Las caídas de presión de la columna, salvo en el caso que opere a una presión reducida, no afectan sensiblemente la curva de equilibrio, por lo que no se justifica la posible corrección. Parece lógico que en lugar de aplicar la curva teórica de equilibrio para calcular  $y = f(x)$  usar la curva real corregida por la eficiencia. Como la eficiencia depende de las condiciones de operación, diseño de platos, etcétera, tendría que trazarse una curva para cada caso.

Tendría que hacerse un diagrama preliminar con la curva teórica y el  $L/V$  adecuado, aplicar la eficiencia de Murphy en los puntos necesarios para trazar la curva real. Habría que ajustar el  $(L/V)$  mínimo y el número de platos sería el real.

2. Los casos importantes son cuando se alimenta la columna con dos corrientes de composición diferente, cuando se extrae otro producto de composición diferen-

te al destilado o al residuo y, el caso más frecuente, cuando la alimentación no entra a su temperatura de ebullición. Los dos primeros casos se tratan con el mismo principio de cálculo para la columna ideal: balances de moles y del componente más volátil. La columna quedaría segmentada en tres secciones divididas por las composiciones de las dos alimentaciones o de la alimentación y el otro producto, cada uno con su línea de operación.

Resulta interesante desarrollar el caso cuando la alimentación no entra a su temperatura de ebullición tal como la enseñaba el Maestro Ramírez, porque los desarrollos tanto del trabajo original de McCabe y Thiele como el de algunos libros de texto, aunque obviamente correctos, contemplan una interpretación física no muy clara.

Para el caso ideal cuando  $L_m = L_n + 1$  ( $A = 1$ ) la intersección de las líneas de operación quedaba sobre el valor de  $x_a$ . Sin embargo, cuando la alimentación no entra a la temperatura de ebullición sucederán cualquiera de dos casos: (a) si está más fría, parte del vapor se condensará para calentarla y (b) si está más caliente, habrá una autoevaporación. En ambos casos la condición de que  $L_m = L_n + 1$  no se cumple y habrá que buscar otra localización para la intersección.

Llamando  $\Delta V$  al número de moles de vapor necesarios para llevar una mol de alimentación a su temperatura de ebullición,  $\Delta V$  puede calcularse por balance de entalpías o por la fórmula

$$\Delta V = \frac{M_a C_{p_a} (t_{eb} - t_a)}{M_v \lambda_v}$$

$M_a$  y  $M_v$ , pesos moleculares de la alimentación y del vapor en ese plato, son prácticamente iguales.

Las ecuaciones de las líneas de operación quedan como sigue:

$$V_n y_n = L_{n+1} x_{n+1} + D x_d \quad (6 \text{ bis})$$

$$V_m y_m = L_{m+1} x_{m+1} - R x_r \quad (9 \text{ bis})$$

en la intersección

$$(y_n = y_m = y) \quad \text{y} \quad (x_{n+1} = x_{m+1} = x)$$

restando (6 bis) de (9 bis),

$$(V_m - V_n) y = (L_{m+1} - L_{n+1}) x - (R x_r + D x_d)$$

pero como

$$\Delta V = (V_m - V_n),$$

$$(L_{m+1} - L_{n+1}) = 1 + \Delta L,$$

$$\Delta L = \Delta V \quad \text{y} \quad R x_r + D x_d = x_a,$$

entonces

$$\Delta V y = (1 + \Delta V) x - x_a$$

(sobre la línea de  $45^\circ$ ,  $y = x = x_a$ .)

La intersección caerá sobre una línea que pasa por  $x_a$  sobre la línea de  $45^\circ$  y con una pendiente de  $(1 + \Delta V)/\Delta V$ .

Cuando la alimentación entra a su temperatura de ebullición,  $\Delta V = 0$ , la línea es vertical (caso ideal). Si entra más fría  $\Delta V$  es positivo, la línea quedará a la derecha de la vertical, y si sobrecalentada, quedará a la izquierda (véase la Figura 6).

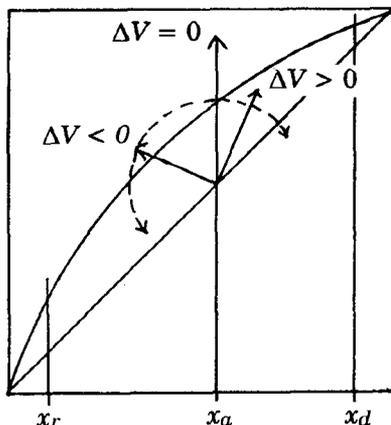


Figura 6. Casos cuando la alimentación no entra a su temperatura de ebullición.

La ecuación

$$y = \frac{1 + \Delta V}{\Delta V} x - \frac{x_a}{\Delta V}$$

es idéntica a la de los libros de texto si  $1 + \Delta V = q$ .

3. Si se quisiera hacer la corrección por pérdidas de calor en la columna, se tendría que hacer un cálculo preliminar de la misma; diámetro, número de platos y altura de ellos. Escogiendo valores de  $x$  suficientes para trazar una curva, se calculan o se estiman las pérdidas de calor entre el domo y el punto correspondiente a la composición  $x$  y el número de moles de vapor condensadas dividido por el valor de  $A$  (moles de alimentación) daría el valor de  $\Delta V$ .

De la ecuación modificada de la línea de operación de la sección de enriquecimiento

$$y = \frac{L + \Delta V}{V + \Delta V} x - \frac{Dx_d}{V + \Delta V}$$

se calcularían los valores de  $y$  correspondientes a cada valor de  $x$ . Análogamente se encontrarían los puntos de la línea de operación de la sección de empobrecimiento.

En forma similar pueden hacerse otras correcciones. Por ejemplo cuando los componentes no sigan la regla de Trouton, se calcula el calor latente molecular del vapor en la parte superior de la columna,

$$Q = V [y (M\lambda)_1 + (1 - y) (M\lambda)_2]$$

en la que  $y = x_d$ ,  $(M\lambda)$  es el calor latente molar de cada componente, que puede calcularse a la temperatura media de la columna.

Despreciando otros efectos térmicos puede considerarse que  $Q$  es constante y entonces

$$V_n = \frac{Q}{[y(M\lambda)_1 + (1 - y) (M\lambda)_2]}$$

De la ecuación de la línea de operación modificada de la sección de enriquecimiento,

$$V_n y_n = (V_n - D) x_{n+1} + D x_d$$

se pueden despejar los valores de  $x_{n+1}$  correspondientes a valores de  $y_n$  para trazar la línea de operación.

En forma análoga se encontrarían puntos para el trazo de la línea de operación de la sección de empobrecimiento.

El método indicado en el artículo original de McCabe y Thiele para corregir la diferencia en los calores latentes moleculares de los componentes, usando "unidades de calor latente", equivale a modificar la relación de pesos moleculares ajustándola a que el producto  $M\lambda$  sea igual para los dos componentes.

Con los pesos moleculares ajustados, se recalculan la curva de equilibrio y los valores de  $x_a$ ,  $x_d$  y  $x_r$  con los que en el diagrama  $x$ - $y$  se pueden usar líneas de operación rectas. El inconveniente de este método es que se trabaja con valores ficticios, sin interpretación física directa.

Las correcciones anteriores ilustran que conociendo los principios y métodos de cálculo, teóricamente, se puede abordar cualquier desviación de las condiciones ideales, aunque algunas de ellas resulten complejas e innecesarias.

Está claro que, aunque no corrigen todas las desviaciones, usando los métodos de Sorel y Ponchon-Savarit se obtienen valores más correctos de número de platos teóricos y de la cantidad de vapor generado en el destilador; pero teniendo en cuenta que estos valores pueden ajustarse variando  $L/V$  y que el número real de platos depende del valor asignado a la eficiencia, salvo casos especiales, no parece justificado utilizar métodos mucho más complejos.

Conviene recordar que cuando se presentó el trabajo sólo se disponía como herramienta de trabajo de la regla de cálculo.

El mérito y la importancia del trabajo de McCabe y Thiele fueron el haber desarrollado un método gráfico sencillo para el cálculo de columnas de rectificación de mezclas binarias que permite visualizar su comportamiento y estudiar fácilmente la influencia de los cambios en las condiciones de operación, y que además puede aplicarse y se ha aplicado en otros procesos en que puedan trazarse una curva de equilibrio y líneas de operación.