Revista *mexicana* de
bachillerato a distancia

Un esquema para planificar
la enseñanza de la matemática

Mabel Alicia Rodríguez

A scheme to plan mathematics teaching

Resumen

La enseñanza de la matemática es una tarea compleja que requiere, de los docentes, conocimientos específicos que trascienden los de la propia disciplina. Entre ellos, se encuentran los referidos a la planificación de la enseñanza. Esto abarca desde la toma inicial de decisiones hasta la evaluación de la propuesta, luego del trabajo en las clases. En este artículo nos centramos en la temática de la planificación de clases de matemática. Sabiendo que hay múltiples autores y posicionamientos al respecto, proponemos un esquema de trabajo y ejemplificamos sus posibles usos, en particular en el entorno en línea.

Palabras clave: planificación de la enseñanza; formación de profesores de matemática; educación matemática; evaluación de propuestas de enseñanza

Abstract

The teaching of mathematics is a complex task that requires, from teachers, specific knowledge that transcends that of the discipline itself. A part of it is related to teaching planning. It goes from the initial decisions to the evaluation of the proposal, once the lesson is completed. In this article, we focus in mathematics class planning. Knowing that there are multiple authors and positions in this regard, we propose a work scheme and exemplify its possible uses, especially for online courses.

Keywords: teaching planning; mathematics teacher development; mathematics education; evaluation of teaching proposals

Introducción

En Argentina, como en muchos países del mundo, compartimos el problema de lograr que los estudiantes de los primeros niveles educativos alcancen aprendizajes matemáticos que resulten valiosos, duraderos y flexibles. Esta problemática deriva rápidamente la mirada al maestro o profesor de matemática. Se estudian las condiciones laborales, la cantidad de horas que tienen frente a cursos, los espacios de los que dispone, o no, para planificar sus clases y evaluar su propuesta, la formación continua, el desarrollo profesional, etc. Pero también se pone la mirada en su formación inicial. De manera muy simplificada podemos decir que por un lado se cuestiona el tipo de conocimientos de los que tendría que disponer un docente para desarrollarse adecuadamente en la tarea de enseñar matemática, y por otro lado cuáles son los medios o formas de que el futuro docente los adquiera. Para dimensionar la complejidad de esto último basta pensar que suele ser un docente de matemática quien tiene a su cargo la formación de nuevos docentes. En su formación, sin duda habrá adquirido herramientas y habrá reflexionado sobre *cómo enseñar matemática, cómo lograr aprendizajes matemáticos en estudiantes*, pero es altamente probable que a lo largo de toda su carrera no haya enfrentado nunca la pregunta de *cómo formar a un sujeto para que éste sea capaz de lograr aprendizajes matemáticos en estudiantes*.

En este trabajo queremos poner el foco en la enseñanza de la matemática para presentar una discusión sobre una forma de encarar esta tarea que, entendemos, aborda la problemática de los aprendizajes frágiles de los estudiantes. Asimismo, hacia el final de este escrito retomaremos lo central de la discusión para reflexionar sobre una analogía que, en la medida en que sea advertida como tal, podría ser de utilidad para pensar en la formación docente tanto para la enseñanza de la matemática como para el complejo rol de “formar docentes”.

1. Un punto de partida

En esta sección presentamos una forma de encarar la enseñanza de la matemática con una perspectiva que invierte una forma de pensar, muchas veces frecuente que tenemos como docentes, cuando nos planteamos *¿qué vamos a enseñar en el curso?*, o *¿qué vamos a enseñar en la parte del curso que corresponde a la semana próxima?*

Invertir este planteo significa hacernos otras preguntas. Dejar de lado las anteriores y, en cambio, respondernos: *¿qué queremos que nuestros estudiantes* ***aprendan, sean capaces de hacer****, en nuestro curso?*, o *¿qué queremos que nuestros estudiantes aprendan en el curso durante la semana próxima?*

Puede sonar trivial, pero veremos las diferencias en posicionamientos de unas y otras y los cambios sustantivos que pueden provocarse en los aprendizajes de los estudiantes.

Vamos a discutir sobre esto, de un modo esquemático y estructural. Esto nos va a permitir identificar potencialidades de este modo de pensar y, hacia el cierre, analizar su adaptabilidad para el momento en el que un docente en lugar de enseñar matemática, forma a futuros docentes.

1.1. Antecedentes y un esquema de trabajo

El problema de cómo abordar la planificación de la enseñanza se estudia en ciencias de la educación y didáctica como una temática general, no específica para matemática. Algunos autores que han trabajado esta temática son Edelstein (2011), Feldman (2010) y Krichesky, Charovsky, Larrondo y Pezzolo (2017). Sin embargo, el campo de la educación matemática también produce aportes específicos a este respecto, como los que ofrecen Godino y Batanero (2008) y Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017). Muchas veces el conocimiento específico sobre planificación de la enseñanza se enmarca, como mencionamos en la Introducción, en el estudio de los tipos de conocimientos de los que tendría que disponer un profesor. Si tomamos esta problemática de manera general, encontramos, entre otros, los aportes originados por Shulman (1987) y sucesores como Ball, Lubienski & Melborn (2001). Si, en cambio, centramos la misma problemática en la formación específica para profesores de matemática, se suman los trabajos como el de Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017) quienes también siguen la línea iniciada por Shulman.

Proponemos pensar en la planificación de la enseñanza con un esquema de trabajo que incluye los siguientes pasos. Los presentamos, primeramente y describimos cada uno a continuación.

Paso 1: *Identificar características del contexto en el que se trabajará.*

Esto significa: tener claras las características del perfil de estudiante que estamos formando (si es de nivel medio, qué se propone para ellos, si es formación de profesores, o de ingenieros, maestros, etc.), la formación anterior de los estudiantes, conocimientos disponibles, materias anteriores cursadas, si la modalidad es totalmente en línea o hay presencialidad a lo largo del curso (y en este caso, si en esos momentos tienen recursos disponibles tales como computadoras, acceso a internet, etc.), entre otros aspectos.

Paso 2: *Proponer metas*

Esto implica responder la pregunta *¿qué es lo que mis estudiantes deberán aprender?* Aquí trataremos de identificar qué es lo central para ellos, lo irrenunciable, aquello que necesariamente deben llevarse de las clases que daremos. Debe responderse en términos de los estudiantes, y no del profesor (es decir no debemos responder *¿qué es lo que enseñaré?*).

Paso 3: *Delinear un posible camino para alcanzar las metas*

Aquí estaremos respondiendo la pregunta: ¿qué podré proponer en mi curso/clase para que mis estudiantes alcancen las metas establecidas en el paso anterior? También en este paso tenemos en cuenta que estaremos evaluando cómo nos resultó la propuesta, por lo que aquí anticipamos si necesitamos recabar datos, cuáles son y cómo los obtendremos, para luego utilizarlos en esa evaluación.

Paso 4: *Ejecutar lo planificado*

Aquí llevamos al aula, o a un escrito (si es el caso de la presentación de un programa anual de una asignatura) la propuesta. Si el curso es presencial, implementamos la planificación, gestionamos la clase y recabamos los datos. Si, en cambio, es un curso online, podemos ser desarrolladores de los contenidos o asesores (tutores, como se les llama en Argentina) en línea. En el primer caso, implementamos la planificación a través de las explicaciones, actividades de aprendizaje y evaluaciones. Si se trata de asesores en línea que gestionan los cursos, aportan momentos de enseñanza, dan retroalimentación y evalúan actividades, exámenes y proyectos.

Paso 5: *Evaluar la propuesta*

En este último paso debemos tomar distancia de lo ocurrido y, de forma lo más objetiva posible (sabiendo que siempre estas evaluaciones son y serán subjetivas) evaluamos el todo. Es decir: desde la caracterización del contexto, si fue adecuada o no, el planteo de las metas, diseño de instrumentos, identificación de datos a recabar, la gestión y recolección de datos para reflexionar sobre nuestra propuesta, con sustento en evidencias. Este paso está asociado a la reflexión metacognitiva del docente que él mismo debe promoverse.

1.2. Un ejemplo

Presentamos aquí un ejemplo de planificación de una clase que sigue la estructura del esquema recién presentado. El ejemplo corresponde a una clase presencial, pero resulta fácil pensarlo para una sesión de asesoría grupal a través de videoconferencia, o a través de un esquema de trabajo colaborativo en línea.

Paso 1: *Identificar características del contexto en el que se trabajará*

Se trata del curso sobre fundamentos del análisis matemático, en formación de profesores, en la Universidad Nacional de General Sarmiento. Los estudiantes conocen cálculo en una y varias variables (límite, derivadas, integrales).

Paso 2: *Proponer metas*

La meta para la clase que presentamos es *que los estudiantes adviertan la necesidad de hacer un uso correcto del lenguaje matemático, tanto para expresar ideas como para comprender ideas que están expresadas por otros*. El contenido puesto en juego para esta meta: el concepto, conocido por los estudiantes, de límite funcional, en el caso en que la variable tiende a un número real y el resultado es finito.

Paso 3: *Delinear un posible camino para alcanzar las metas*

Se propone la siguiente consigna y el modo de trabajo que se indica a continuación. Los datos que se recabarán, para evaluar la propuesta de la clase, se indican en la misma consigna que reciben los estudiantes.

Primera mitad de la clase: trabajamos sobre el concepto de límite de funciones de la siguiente forma:

Consigna

El siguiente trabajo se realizará en grupos de dos alumnos, que denominamos A y B. Se entregará completo al final de la clase, por lo que solicitamos que sea resuelto en hojas sueltas.

1. Cada estudiante, por separado (en una hoja cada uno), debe escribir:
    a) la definición de límite (caso finito) y
    b) lo que considere que es su explicación del concepto.
2. Se intercambian las hojas entre A y B y cada uno debe comentar o corregir al otro dejando indicaciones con lápiz. Luego de eso,
3. Los dos estudiantes trabajando conjuntamente deben producir un nuevo escrito en el que acuerden presentar:
    a) una definición del concepto de límite (caso finito)
    b) una explicación de lo que significa ese concepto
    c) una explicación del uso de los símbolos. Es decir, deben explicar por qué los símbolos que utilizaron en i) expresan la idea o la explicación que presentaron en ii).

Después del tiempo dado para que realicen la actividad, el docente solicita a una dupla (o alguna más, si hay tiempo) que presente en el pizarrón los acuerdos finales alcanzados como respuesta al ítem (3°) y pide que comenten cómo fue la interacción entre el par.

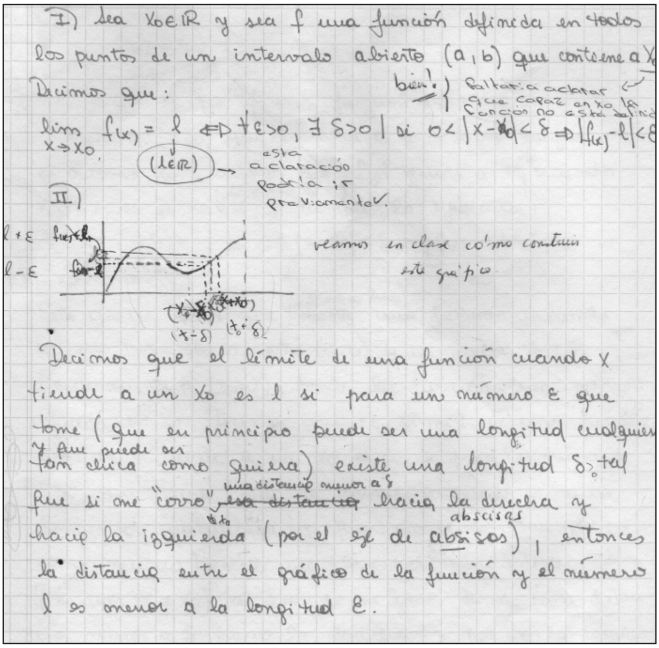
A continuación, el docente da la siguiente consigna, para debatir en conjunto: *identificar, a partir de la actividad de recién, qué consideran importante resaltar y tener en cuenta respecto del uso del lenguaje matemático*.

Paso 4: *Ejecutar lo planificado*

Incluimos a continuación imágenes de una resolución[1].

---

[1] Agradecimiento: Las imágenes presentadas en el ejemplo fueron facilitadas por las estudiantes Romina Segretín y Débora Altamirano a quienes agradecemos su disposición y autorización para incluirlas.



I) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0

Decimos que:

bien! } faltaría aclarar que capaz en xo la función no está definid

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$ si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

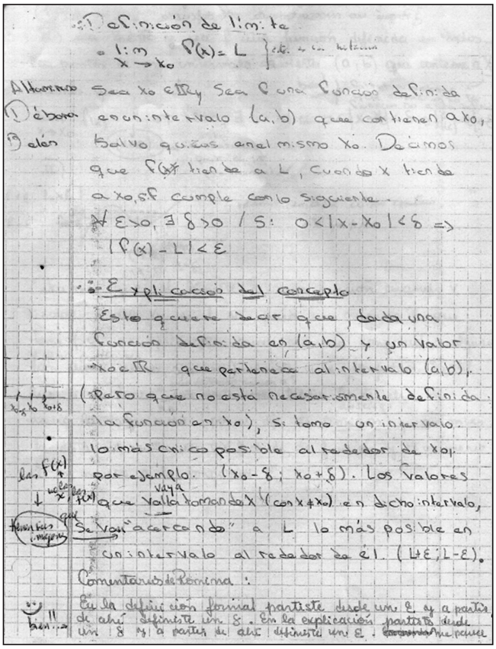
$(l \in \mathbb{R})$ → esta aclaración podría ir previamente ✓.

II)

veamos en clase cómo construir este gráfico

Decimos que el límite de una función cuando x tiende a un x_0 es l si para un número ε que tome (que en principio puede ser una longitud cualquier y que puede ser tan chica como quiera) existe una longitud $\delta > 0$ tal que si me "corro" una distancia menor a δ ~~esa distancia~~ hacia la derecha y hacia la izquierda de x_0 (por el eje de abscisas absisos), entonces la distancia entre el gráfico de la función y el número l es menor a la longitud ε.

Figura 1. Resolución alumna A.



1) Definición de límite

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ } [illegible]

Al alumno [illegible]

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea f una función definida en un intervalo (a, b) que contienen a x_0, salvo quizás en el mismo x_0. Decimos que f(x) tiende a L, cuando x tiende a x_0, si cumple con lo siguiente:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\,$ si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Explicación del concepto

Esto quiere decir que, dada una función definida en (a, b) y un valor $x_0 \in \mathbb{R}$ que pertenece al intervalo (a, b), (pero que no está necesariamente definida la función en x_0), si tomo un intervalo lo más chico posible alrededor de x_0, por ejemplo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Los valores que vaya valla tomando x (con $x \neq x_0$) en dicho intervalo, se van "acercando" a L lo más posible en un intervalo alrededor de él. $(L+\varepsilon; L-\varepsilon)$.

$x_0-\delta$ x_0 $x_0+\delta$

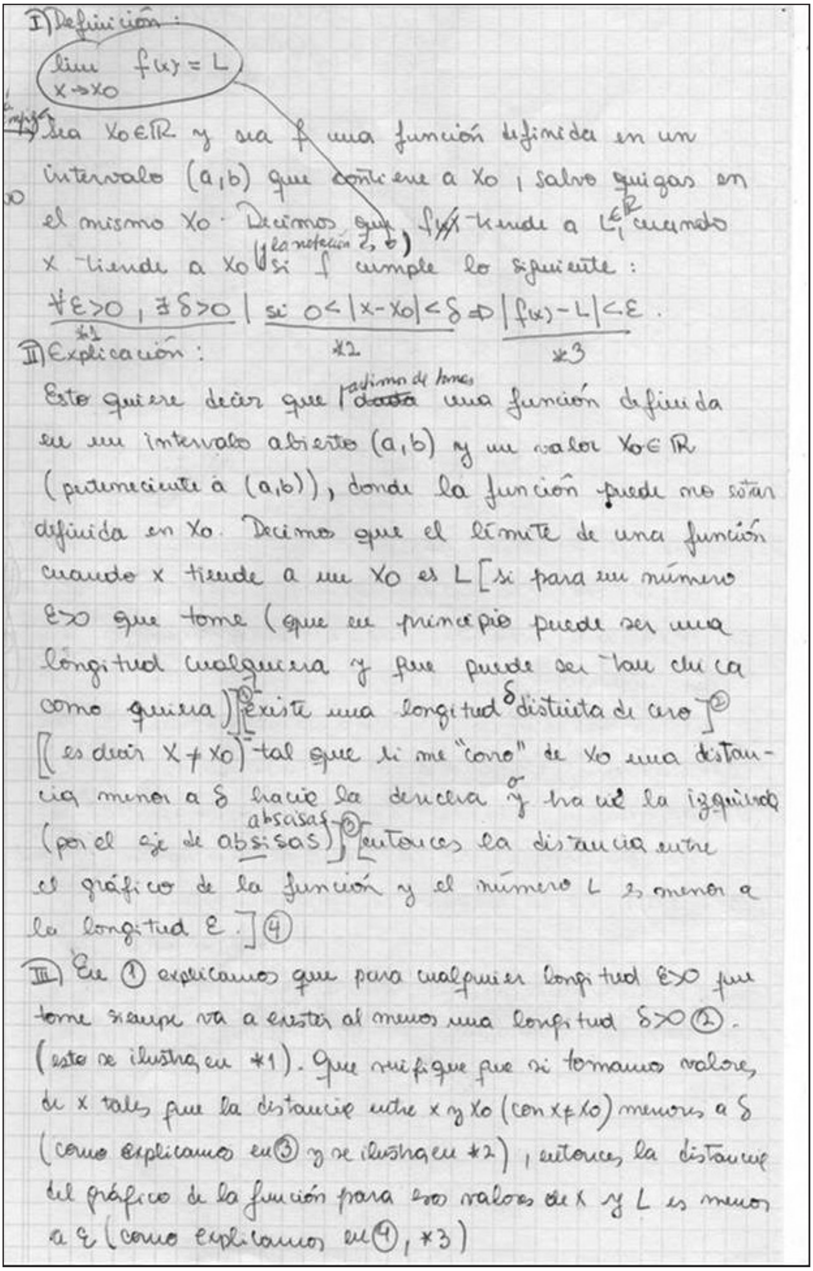
las f(x) que

Comentarios de Romina:

En la definición formal partiste desde un ε y a partir de ahí definiste un δ. En la explicación partiste desde un δ y a partir de ahí definiste un ε. me parece

bien!!

Figura 2. Resolución alumna B



I) Definición:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Empieza → Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea f una función definida en un intervalo (a,b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0. Decimos que f~~(x)~~ tiende a $L \in \mathbb{R}$, cuando x tiende a x_0 (y la notación) si f cumple lo siguiente:

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0}_{*1} \mid \underbrace{\text{si } 0 < |x - x_0| < \delta}_{*2} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{*3}.$$

II) Explicación:

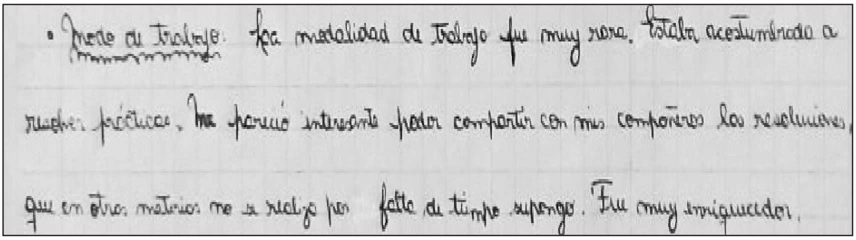
Esto quiere decir que partimos de tomar ~~dada~~ una función definida en un intervalo abierto (a,b) y un valor $x_0 \in \mathbb{R}$ (perteneciente a (a,b)), donde la función puede no estar definida en x_0. Decimos que el límite de una función cuando x tiende a un x_0 es L [si para un número ε>0 que tome (que en principio puede ser una longitud cualquiera y que puede ser tan chica como quiera)] ① [existe una longitud δ distinta de cero] ② [(es decir $x \neq x_0$) tal que si me "corro" de x_0 una distancia menor a δ hacia la derecha o hacia la izquierda (por el eje de ~~absisas~~ abscisas)] ③ [entonces la distancia entre el gráfico de la función y el número L es menor a la longitud ε.] ④

III) En ① explicamos que para cualquier longitud ε>0 que tome siempre va a existir al menos una longitud δ>0 ②. (esto se ilustra en *1). Que significa que si tomamos valores de x tales que la distancia entre x y x_0 (con $x \neq x_0$) menores a δ (como explicamos en ③ y se ilustra en *2), entonces la distancia del gráfico de la función para esos valores de x y L es menor a ε (como explicamos en ④, *3)

Figura 3. Resolución conjunta.

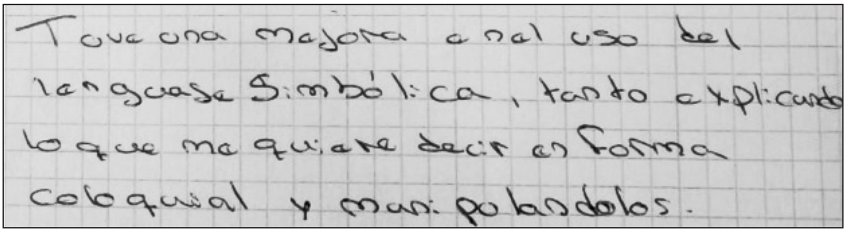
Paso 5: *Evaluar la propuesta*

Recabamos información de los estudiantes respecto de los objetivos y grado de alcance. Presentamos aquí algunos comentarios recibidos. Como docentes, planteamos la construcción de un portafolio con entregas periódicas de consignas solicitadas, y reentregas realizadas por los estudiantes. Eso nos dio elementos para evaluar la planificación.



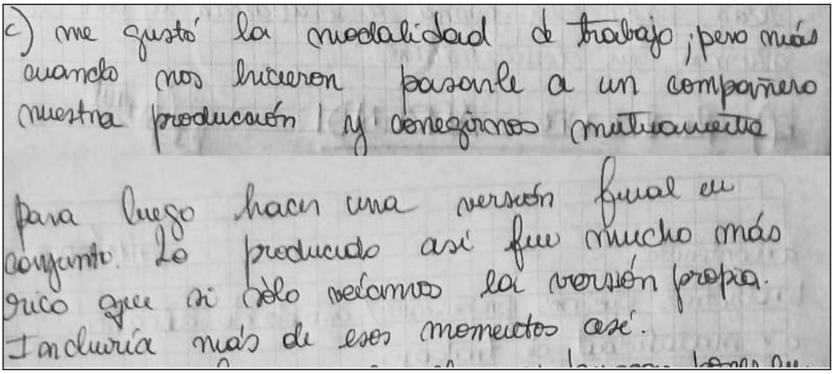
- Modo de trabajo: La modalidad de trabajo fue muy rara. Estaba acostumbrado a resolver prácticas. Me pareció interesante poder compartir con mis compañeros las resoluciones, que en otras materias no se realiza por falta de tiempo supongo. Fue muy enriquecedor.

Figura 4. Opinión del estudiante 1.



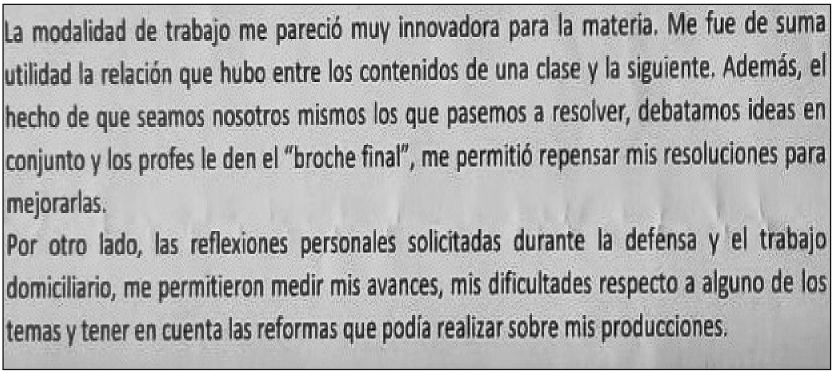
Tuve una mejora en el uso del lenguaje Simbólico, tanto explicando lo que me quiere decir en forma coloquial y manipulandolos.

Figura 5. Opinión del estudiante 2.



c) me gustó la modalidad de trabajo, pero más cuando nos hicieron pasarle a un compañero nuestra producción y corregirnos mutuamente para luego hacer una versión final en conjunto. Lo producido así fue mucho más rico que si sólo hacíamos la versión propia. Incluiría más de esos momentos así.

Figura 6. Opinión del estudiante 3.



La modalidad de trabajo me pareció muy innovadora para la materia. Me fue de suma utilidad la relación que hubo entre los contenidos de una clase y la siguiente. Además, el hecho de que seamos nosotros mismos los que pasemos a resolver, debatamos ideas en conjunto y los profes le den el "broche final", me permitió repensar mis resoluciones para mejorarlas.

Por otro lado, las reflexiones personales solicitadas durante la defensa y el trabajo domiciliario, me permitieron medir mis avances, mis dificultades respecto a alguno de los temas y tener en cuenta las reformas que podía realizar sobre mis producciones.

Figura 7. Opinión del estudiante 4.

Lo valioso de esta tarea para nuestros alumnos, y es parte de lo que como docentes nos planteamos hacerles ver, es la necesidad de seguir ajustando definiciones y comprender su significado. No basta poder leer símbolos y repetirlos. El hecho de poder explicar lo que significa algo ante un par deja de manifiesto la comprensión. Cabe resaltar que es una explicación que se destina a un par, y no la explicación para enseñarle algo a alguien que no lo sabe. Se suma, en el ítem c) lo valioso que de tener que comprender por qué los símbolos expresan, o no una idea matemática.

2. Discusión y cierre

Como inicio de esta sección, nos interesa resaltar lo presentado contraponiéndolo con un ejemplo similar, pero planificado *desde la enseñanza*, es decir desde el posicionamiento del docente que decide "qué es lo que enseñará al día siguiente". Desde una perspectiva de este tipo, el docente podría pensar en una planificación que incluya, sea en un aula presencial o virtual, o a través de materiales en línea: presentar él la definición de límite para lo que podría expresar la idea en lenguaje verbal, incluir algún gráfico, tabla de valores y finalmente presentar la definición simbólicamente. A continuación, podría explicar el uso de los símbolos, es decir por qué el escrito simbólico representa la idea presentada oral y gráficamente sobre el concepto. Un curso organizado de este modo podría tener a los estudiantes desde un rol absolutamente pasivo, sólo tomando notas en el aula o leyendo en línea, o podría estar en interacción con el docente o con los materiales al establecer preguntas y formas de orientación para los estudiantes. Entre estos extremos caben posiciones intermedias. De todos modos, cualquiera que sea el punto, intermedio o no, los estudiantes no están en cursos de este tipo con la posibilidad de tomar decisiones, sino que siguen el hilo conductor que el docente propone. No hay garantía de que estén reflexionando sobre los objetos matemáticos. Tal vez lo hagan, o tal vez no. El hecho de que el docente presente *su* reflexión, no le abre al alumno la posibilidad y el tiempo para que sea él quien reflexione sobre el concepto, el lenguaje, etc. Hoy en día, las líneas de educación matemática vigentes, en su totalidad y más allá de los matices que cada una presenta, comparten el hecho que el estudiante tenga un rol activo en clases. Esto se expresa en el sentido de tomar decisiones, rasgo que, conjuntamente con el desarrollo de la argumentación, fortalecerá gradualmente su autonomía. La gestión del curso queda bajo su absoluto control y podría basar la evaluación de su propuesta en función de si terminó o no con lo planeado, o de cómo él se percibió en las explicaciones.

Ahora bien, como anticipamos, le proponemos al lector retomar el esquema estructural, y ubicarnos con él en un nuevo contexto de enseñanza, como el de "la formación de profesores", es decir, un profesor de matemática que tiene a su cargo "formar a un docente de matemática". Bastaría pensar en una capacitación para docentes en actividad, en un coordinador de un grupo de profesores que comparten el dictado de una materia en distintos cursos, o en la virtualidad, en el dictado de materias específicas de un profesorado, etc. Podemos ver que la estructura podría aplicarse perfectamente. Solo deberíamos cambiar los contenidos, tomando y adaptando aquellos que son apropiados para la formación docente.

Bibliografía

Ball, D., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). New York, NY: Macmillan.

Barreiro, P.; Leonian, P.; Marino, T.; Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Buenos Aires: Ediciones UNGS. Recuperado de: https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2019/03/9789876302852-completo.pdf.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives. V. 22*, p. 185-205.

Edelstein, G. (2011). *Formar y formarse en la enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Feldman, D. (2010). *Didáctica General. Aportes para el desarrollo curricular.* Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Recuperado de: https://cedoc.infd.edu.ar/upload/Didactica_general.pdf.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Conferencia Invitada al VI CIBEM*, Puerto Montt (Chile), 4-9 Enero 2009.

Krichescky, G., Charovsky, M., Larrondo, M. y Pezzolo, A. (2017). *Modelos y escalas en la planificación. Reflexiones y ejemplos para una práctica necesaria*. Los Polvorines, Provincia de Buenos Aires, Argentina: Ediciones UNGS.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*. *V. 57, n.1*, p. 1-22.

Dra. Mabel Alicia Rodríguez
mrodri@campus.ungs.edu.ar
Universidad Nacional de General Sarmiento
https://orcid.org/0000-0002-8425-8572